335.719

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

A. II.

EGYVÁLTOZÓS ELEMI FÜGGVÉNYEK

ÍRTA:
DR. FREY TAMÁS
DR. FAZEKAS FERENC
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

Negyedik, változatlan kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1977

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS, DR. MATH. SC.

★

BELSŐ MUNKATÁRSAK
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR,
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK
DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK
KANDIDÁTUSA

★

SZEMLÉLTETÉS
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1977

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Negyedik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Ötödik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Ötödik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
A. V. Határozott integrál (Második rész)** (Harmadik kiadás)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Negyedik kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Negyedik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X.* A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

B. I-II-III. Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Negyedik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Negyedik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Harmadik kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek (Első rész) (Ötödik kiadás)
B. VII. Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)** (Harmadik kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Harmadik kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Ötödik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Harmadik kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Negyedik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. II.

EGYVÁLTOZÓS ELEMI FÜGGVÉNYEK

ÍRTA
DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR, A MŰSZ. TUD. DOKTORA

KÖZREMŰKÖDÖTT
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS, DR. MATH. SC.

Negyedik, változatlan kiadás

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
K 045 201

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE
DR. BÁLINT ELEMÉR
TANSZÉKVEZETŐ DOCENS

© DR. FREY TAMÁS, DR. FAZEKAS FERENC, 1953

ISBN 963 17 2869 2

KIADÁSÁT
AZ OKTATÁSI MINISZTER
RENDELTE EL

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus, professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és *B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (nem mellékes) *célja* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyes-

lésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatárake.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt*, megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó forrásokból, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert igérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus, professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről*, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak*, különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek*, amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás

munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplináját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben a *Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területi és e miatt mindinkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. I–II -III., B. IV., B. VII.

Az utóbbi második kiadások fél éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás, lineáris algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavában kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában, NSzK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a *Minisztérium*, *a Tankönyvkiadó* és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15. A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

A Műszaki Matematikai Gyakorlatok e kötete Műszaki Egyetemeink hallgatóinak kíván segítséget nyújtani első féléves matematikai tanulmányaikban.

Az első részben az olvasó alapvető függvénytani fogalmakkal ismerkedhetik meg; ezeket a legsűrűbben szereplő függvényeken világítjuk meg. Ez utóbbiak részletes analízisét a következő részek tartalmazzák. Ezek tanulmányozása során célszerű visszalapozni az első rész megfelelő helyeire.

A szövegben csillaggal jelöltük meg azokat a részeket, amelyeket elsősorban az igényesebb, szélesebb érdeklődési körű olvasónak szántunk; így pl. a 10. §-t, amely a határértékfogalmakat mélyebben vizsgálja a Műegyetemen szokásosnál. Néhány — nehezebb, de nem általános érdekű — feladathoz az eredménytárban adtunk útbaigazítást; erre a „L. hátul!" megjegyzés utal.

A számos forrás közül ki kell emelnünk a Berman-féle s részben a Gjunter—Kuzmin-féle szovjet példatárakat, amelyekből mind szerkezeti, mind példaanyag tekintetében sokat merítettünk.

A tájékozottabb olvasó észlelni fogja, hogy nem elégedtünk meg csupán közismert, szinte sablonos függvények és görbék ismertetésével. E fejezet sajátosan „ábrás" jellege mellett e körülmény magyarázza az ábrák viszonylag nagy számát.

Az ábrák *Gyurcsy Endre* szakszerű és lelkiismeretes munkáját dícsérik.

E kötet megjelenésének elősegítéséért köszönetet mondok a Közoktatásügyi Minisztériumnak. Társszerzőm, *Fazekas Ferenc* a példaanyag jelentős részének összegyűjtésével, a szerkezet részletes megtervezésében és nagyszámú főszerkesztői megjegyzésével támogatott. Köszönet illeti továbbá *dr. Bálint Elemér* tanszékvezető docenst, többszöri lelkiismeretes bírálatáért és sok értékes tanácsáért.

Budapest, 1952. július 20. *FREY TAMÁS*

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

E kötetet az elmúlt 10 év alatt kedvező tapasztalatokkal használták a műszaki egyetemi matematikaoktatásban. Ezért a második kiadásban – néhány sajtóhiba kijavításától eltekintve – változtatást nem tartottam szükségesnek, azt is figyelembe véve, hogy a következő tanév elejére az új kiadás a hallgatók kezébe kerülhessen.

Budapest, 1962. április 10. *DR. FREY TAMÁS*

ELŐSZÓ A KÖTET HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A jelen újranyomás a két év előtti másodiktól néhány újabban észrevett sajtóhiba és pontatlanság helyreigazításában s egy-két rövid beszúrásban tér el. Köszönetet mondunk azon kedves Kollégáinknak, akik a vonatkozó helyekre felhívták figyelmünket.

Minthogy többen utaltak már sorozatunk bizonyos tankönyvpótló szerepére, tervbe vettük néhány kötetünk, köztük ezen kötet átdolgozását is, az évtizedes felhasználás gazdag tapasztalatai alapján. Egyébként sorozatunk említett szerepét az évek óta folyó korszerűsítő bővítések és a sajtó alatt levő új kötetek is bizonyára előmozdítják.

Budapest, 1965. aug. 15., 1977. febr. 15. *A SZERZŐK*

TARTALOMJEGYZÉK

ELSŐ RÉSZ

A FÜGGVÉNYRŐL ALTALÁBAN

1. § A függvény fogalma. Jelölések (szimbolika) 11
a) A függvény; megadási módjai; ábrázolása 11
α) Definíció 11
β) A függvény megadása 11
γ) A grafikonról 11
b) Jelölések (szimbolika) 12
α) Egyszerű függvényekkel kapcsolatos jelölések 12
β) Összetett függvények szimbolikája 12
c) Függvények paraméteres egyenletrendszere 13
α) Mozgásegyenletek 14
β) Átalakítások 14
d) A függvények osztályozása 14
Feladatok 15
2. § A függvény egyes jellegzetességei 30
a) Értelmezési tartomány—értékkészlet 30
b) A függvény páros, illetve páratlan volta, aszimmetriája 31
α) Páros függvények 31
β) Páratlan függvények 31
γ) A koordinátarendszerre vonatkozóan aszimmetrikus görbéjű függvények 31
c) Többértékűség 32
d) Periodicitás 32
e) Folytonosság, szakadás 32
Feladatok 33
3. § A változók transzformációja 33
a) Lineáris transzformáció 47
α) Eltolás 47
β) Nyújtás 48
γ) Általános eset 50
b) Nemlineáris transzformációk 52
α) Görbetranszformáció 52
β) Koordinátatranszformáció 53
Feladatok 53
4. § Inverz függvények 61

MÁSODIK RÉSZ

ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK

5. § Racionális egészfüggvények 63
a) Egytagok (monomok) 64
b) Elsőfokú (lineáris) függvények 64
α) Általános alak 65

β) Lineáris interpoláció 65
c) Másodfokú (kvadratikus) függvények 66
d) Harmadfokú függvenyek 67
e) Magasabbfokú függvények 68
Feladatok 68
6. § Racionális törtfüggvények 79
a) Racionális törtfüggvények általában 79
α) Előállítási módok 79
β) Az $y = \frac{1}{x^n}$ alakú törtfüggvények 80
b) «Linearis törtfüggvények 80
c) «Magasabbfokú törtfüggvények 80
α) Általános alak 80
β) Zérushely 81
γ) Pólus 81
δ) Megszüntethető szingularitás 81
ε) Aszimptoták 81
Feladatok 82
7. § Irracionális függvények .....

HARMADIK RÉSZ

TRANSZCENDENS FÜGGVÉNYEK

8. § Trigonometrikus és körmérő (arcus-) függvények 99
a) Trigonometrikus függvények 99
α) Definíciók 99
β) Alapösszefüggések 100
γ) Geometriai és mechanikai alkalmazások 102
δ) Rezgéstani alkalmazások 102
b) A trigonometrikus függvények inverzei 102
α) Definíciók 102
β) Ábrázolás. Transzformáció 104
γ) Alapösszefüggések 104
δ) Az arcusfüggvények néhány gyakorlati alkalmazása 105
c) Trigonometrikus egyenletek 105
Feladatok 132
9. § Exponenciális és hiperbolikus függvények és inverzek 132
a) Exponenciális függvény 132
α) Ábrázolás. Transzformáció 132
β) Alapösszefüggések 132
γ) Gyakorlati alkalmazások 132
b) Logaritmus függvény 133
α) Ábrázolás. Transzformáció. Alapösszefüggések 133
β) Gyakorlati alkalmazások 132
c) Hiperbolikus függvények és inverzek 133
α) Ábrázolásuk 134
γ) Alapösszefüggések 134
δ) Alkalmazások 139
Feladatok 139

NEGYEDIK RÉSZ

KIEGÉSZÍTÉS

10. § Sorozatok. Végtelen sorok. Függvények határértéke és folytonossága 150
a) Sorozatok 150
b) Végtelen sorok 164
c) Függvények határértéke és folytonossága 166

ÖTÖDIK RÉSZ

EREDMÉNYTÁR

ELSŐ RÉSZ

A FÜGGVÉNYRŐL ÁLTALÁBAN

1. §. A FÜGGVÉNY FOGALMA. JELÖLÉSEK (SZIMBOLIKA)

a) A függvény; megadásmódjai; ábrázolása

α) **Definíció.** *Két változó mennyiségnek olyan kapcsolatát, amelynek segítségével az egyik változó minden szóba jöhető értékéhez a másik változó egy vagy több meghatározott értékét rendeljük, (egyváltozós) függvénynek nevezzük.*

Azt a változót, amelynek értékét szabadon óhajtjuk változtatni: független változónak, a másikat pedig függő változónak nevezzük. Matematikai jellegű feladatokban úgy választjuk meg általában a függő és független változót, hogy a számítások, vizsgálatok lehető egyszerűek legyenek; alkalmazásokban az ismert, könnyebben mérhető vagy általunk előírt módon változtatható mennyiségnek megfelelő változót szoktuk függetlennek tekinteni. Jegyezzük meg azonban, hogy választásunk teljesen önkényes, szükség esetén bármikor megcserélhetjük a két változó szerepét.

β) **A függvény megadása.** A kapcsolat, amelynek segítségével a változók bizonyos értékeit egymáshoz rendeljük, sokféleképpen adható meg. Leggyakrabban azonban képlettel, gyakorlati feladatoknál pedig táblázattal vagy még inkább grafikonnal történhetik a változók közötti összefüggés jellemzése.

γ) **A grafikonról.** A gyakorlatban nagyon sokszor felmerül az a kívánság, hogy a függvénykapcsolat által egymáshoz rendelt értékpárokról — illetve magáról a kapcsolatról — szemléletes képet nyerjünk; más szóval, hogy a függvényt ábrázoljuk. Erre a célra legalkalmasabb és leggyakrabban használatos a derékszögű koordinátarendszer, amelynek segítségével a függvény által egymáshoz rendelt számpároknak a sík egy-egy pontját feleltetjük meg és viszont. Gyakran az így megadott koordinátarendszer tengelyein *egymástól különböző léptékű beosztást,* sőt olykor egyik vagy másik tengelyen *nem* is *egyenletes beosztású skálázást* használunk. Az utóbbiak közül az egyszer és a kétszer logaritmikus beosztású koordinátarendszerek (első esetben csak az egyik tengelyen van egyenletestől eltérő, logaritmikus beosztás — olyan, mint a logarlécen —, a második esetben mindkét tengelyen), továbbá a hiperbolikus skálabeosztásúak fordulnak elő a gyakorlatban. Ugyanannak a függvénykapcsolatnak a grafikonja természetesen egészen más jellegű a különböző beosztású koordinátarendszerekben.

A függvényábrázolás önmagában is jelentős; emellett — éppen szemléletessége következtében — a függvények bevezető tanulmányozására igen alkalmas.

b) Jelölések

α) **Egyszerű függvényekkel kapcsolatos jelölések.** Az $f(x)$, $F(z)$, $\varphi(t)$ stb. *jelölések* az x, z, t stb. független változók olyan ismert (esetleg ismeretlen) kapcsolatát jelképezik, amelyeknél a grafikonból azonnal leolvasható, illetve a képletből közvetlenül kiszámítható a szóba jövő független változó értékekhez rendelt függő változó értéke, röviden függvényérték. A függvénykapcsolatnak képlettel történő megadása esetén a független változó valamely adott α értékéhez tartozó függvényértéket helyettesítés útján számítjuk ki. A függvényértéket ilyenkor *helyettesítési értéknek* hívjuk. A független változó (argumentum) bizonyos α értékéhez tartozó függvényértékeket tehát így jelöljük:

$$y = f(\alpha); \qquad u = F(\alpha); \qquad v = \varphi(\alpha).$$

Itt az f, F, φ betűk a függvénykapcsolatot jelképezik. E célra gyakran a függő változó betűjelét is fel szoktuk használni. Magát a függvénykapcsolatot tehát ilyen alakban is írjuk:

$$y = y(x); \qquad u = u(x); \qquad v = v(t)$$

stb.; a független változó valamely α értékéhez tartozó függvényértéket tehát így is jelölhetjük;

$$y = y(\alpha); \qquad u = u(\alpha); \qquad v = v(\alpha) \text{ stb.}$$

β) **Összetett függvények szimbolikája.** Érdekes jelölési (szimbolikai) kérdés vetődik fel az összetett függvénynél. Összetett függvényről beszélünk akkor, ha *több képlettel adott függvény áll előttünk*, melyek között az a kapcsolat, hogy az egyik függvény függő változója a másikban független változóként szerepel. *Két tetszés szerinti változó közt tehát közvetett függvénykapcsolat* állhat fenn; ezt a függvénykapcsolatot a *közvetítő változók lépésenkénti kiküszöbölésével egyetlen képletbe, éppen az «összetett függvény»*[1] *képletébe tömöríthetjük.* Ez persze, mint a neve is érzékelteti, bonyolultabb, rendszerint több függvényfajtát tartalmazó függvény — éppen ezért *a fordított feladat is gyakori.* Igen gyakran egy eredetileg *egyetlen bonyolult képlettel adott függvénykapcsolatot* mi magunk bontunk több egyszerűre. Különösen olyankor, ha a független változó értékeiből csak több egymást követő, de egymástól elütő jellegű művelet segítségével számíthatjuk a függvényértéket. Ilyenkor ugyanis kényelmesebb — különösen, ha pl. számológéppel számolunk s nem egy, hanem több különböző helyhez tartozó értéket — a műveletsorozatot lépésenként elvégezni; mégpedig minden lépést egymás után az összes előírt helyen.

Pl. az $y = \sqrt{x + \operatorname{tg}^2 x}$ függvényt a következőképp bontjuk fel: az algebra szabályai szerint a négyzetgyökvonást csak az összeadás után végezhetjük el; az összeadást pedig a második tagban kijelölt négyzetre emelés meg kell hogy előzze.

Így: $u = \operatorname{tg} x$. A számítást nyilván úgy kezdjük, hogy valamennyi adott független változó értékhez kikeressük a táblázatból a $\operatorname{tg} x$ értékét. Ezután:

$v = u^2$. (Most végezzük el a négyzetre emelést. Látható, hogy az előző számítás eredményeiből indulunk itt ki — azaz az első «közvetítő függvény» függő változója a másodikban a független változó szerepét játssza.)

Majd:

$$w = x + v; \qquad y = \sqrt{w}$$

[1] «Függvény függvénye»-nek is szokás nevezni.

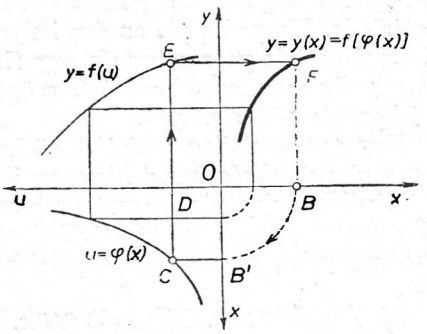
(A felbontásnál tehát legtöbbször azt a sorrendet és módot követjük, amit a numerikus számításnál legcélszerűbben használhatunk!) A viszonyok világos felismerése a differenciálszámításnál igen lényeges!

A *közvetett függvények görbéjének* egy igen egyszerű *szerkesztési módját* is bemutatjuk, amit a későbbiekben jól felhasználhatunk. Az összetett függvény a következő alakban adott:

$$y = f(u); \qquad u = \varphi(x).$$

Megszerkesztendő az $y = y(x) = f[\varphi(x)]$ függvénygörbe (l. az 1. ábra jelöléseit). A függvény első negyedbeli görbeívének szerkesztését mutatjuk be, a többi negyedbeli szerkesztéseknél az itt használtakat megfelelően 90°-kal, 180°-kal stb. elforgatjuk.

Az x és y tengely pozitív ágát a szokásos módon választjuk és kótázzuk. Ebbe a negyedbe kerül majd a keresett $y = f[\varphi(x)]$ görbe. Az y tengely negatív felét pozitív x tengelynek tekintjük és aszerint kótázzuk; a negatív x-tengelyfelet pedig pozitív u tengelynek. Ezután a 3. negyedben levő x, u koordinátarendszerben ábrázoljuk az adott $u = \varphi(x)$ függvényt; a 2. negyedben pedig az u, y koordinátarendszerben a szintén ismert $y = f(u)$ függvényt. Ezek után egy kiválasztott $x = b$ abszcisszához a következőképp szerkeszthetjük meg a keresett $y = f[\varphi(b)]$ ordinátát. (Az $x = b$ abszcisszához tartozó egyenes be van rajzolva, talppontja: a (b, O) pont, B-vel van jelölve.) Ezt az abszcisszát megkeressük (vagy átkörzőzzük) a másik, függélyes x-tengelyfélen: B'. Az $u = \varphi(x)$ görbe segítségével megkeressük a megfelelő $u_1 = \varphi(b)$ ordinátát (a rajzon a $\overline{CD}$ távolság). Ezután az $y = f(u)$ görbe segítségével az u_1 abszcisszához kikeressük az $y_1 = f(u_1) = f[\varphi(b)]$ ordinátát. (A rajzon a $\overline{DE}$ távolság.) Az E pontot átvetítve az $x = b$ egyenesre, megkapjuk a görbe keresett pontját (F).



1. ábra

c) Függvények paraméteres egyenletrendszere

A közvetett függvények egy speciális esete a paraméteres függvénykapcsolat. Abban az esetben, ha a két változó közötti kapcsolatot egy (harmadik) segédváltozó — paraméter — segítségével adjuk meg, éspedig oly módon, hogy mindkét változó a paraméter explicit függvénye, beszélünk paraméteres függvénykapcsolatról vagy paraméteres egyenletrendszerről. Utóbbi elnevezés onnét származik, hogy a függvény jellegének felismerése céljából gyakran arra kényszerülünk, hogy a két függvényből — az egyenletrendszereknél megismert megoldási módok valamelyikével — a paramétert kiküszöböljük, és a két változó összefüggését közvetlenül adjuk meg.

α) **Mozgásegyenletek.** Geometriailag definiált görbék egyenletét igen gyakran paraméteres alakban legcélszerűbb megadni. Ebből a célból legegyszerűbb a görbét mint egy, a síkban mozgó pont pályáját felfogni. Ha egy pont mozog a síkon, akkor annak koordinátái az idő folyamán változnak, azaz az idő függvényei lesznek. Ha tehát az időt t-vel jelöljük, akkor a mozgást matematikailag az $x=x(t)$ és $y=y(t)$ függvények fejezik ki, amelyek bármely időpillanatban megadják a mozgó pont koordinátáit. Ha arra gondolunk még, hogy egy mozgó pont mozgásegyenletét leírandó, egy stopperórával kezünkben figyeljük a mozgó pont koordinátáit, s a stopperóra lehet jó, de járhat teljesen egyenlőtlenül is, azonnal rájövünk, hogy utóbbi esetben a mozgásegyenleteket egészen másként írjuk ugyan fel, de a pontot végeredményben ugyanazon pályán látjuk — ami lényegében annyit jelent, hogy ugyanazt a görbét több különböző paraméteres egyenletrendszerrel írhatjuk le. Ha pedig pl. az óra helyett szögmérővel rendelkezünk, az idő helyett felhasználhatjuk paraméternek egy fix pontból a mozgó pontba húzott egyenesnek egy fix egyenessel bezárt Θ szögét is; azaz az $x=x(\Theta)$ és $y=y(\Theta)$ kapcsolattal jellemezhetjük a pályát.

Egy geometriailag definiált görbe mozgásegyenletének (paraméteres egyenletrendszerének) felírásakor a következőképp járunk el:

Kiválasztjuk a görbe egy tetszés szerinti pontját (azaz egy — tetszés szerinti — t, ill. Θ stb. paraméterértéket). Felhasználjuk a definícióban megadott geometriai összefüggéseket, és ezek segítségével megadjuk a t és x, valamint a t és y kapcsolatát.

β) **Átalakítások.** Megemlítettük, hogy gyakran kényszerülünk arra, hogy a paraméteres egyenletrendszerből a paramétert kiküszöbölve, felírjuk a változókat közvetlenül összekötő függvénykapcsolatot — elsősorban olyan esetekben, amikor a görbe jellegzetességeit akarjuk vizsgálni. Implicit függvények esetén viszont — amikor pl. értéktáblázatot óhajtunk készíteni a függvényről, de a független változó egyes értékeihez tartozó függvényértékeket csak magasabb fokú algebrai vagy éppen transzcendes egyenletek megoldása révén számíthatnók — gyakran épp a fordított eljárás vezet célhoz. Ha ti. sikerül az implicit függvényt paraméteres egyenletrendszerré átírni, akkor a paraméter egy-egy értékének kiválasztásával néhány művelet elvégzése árán kaphatunk egymáshoz tartozó értékpárokat.

d) A függvények osztályozása

Ha két változó kapcsolatát megadó képletben *csak algebrai műveleti jelek* (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, egész kitevőre való hatványozás és gyökvonás) szerepelnek és *csupán véges számban*, akkor az egyik változó a másiknak **algebrai függvénye.** Amennyiben az egyenlőségben *más műveleti jelek* (pl. irracionális kitevőjű hatvány, sin, log stb.) *is* szerepelnek, akkor az egyik változó a másiknak **transzcendens függvénye.** Ez utóbbi függvényeket — mint majd látni fogjuk — algebrai (véges, ún. elemi) képlettel tetszés szerinti pontossággal ugyan, de csak közelíteni (approximálni) lehet. Ilyen közelítő értékeket tartalmaznak a különféle táblázatok. Precíziósan csak úgy lehet megadni transzcendens függvényt algebrai műveleteket tartalmazó kifejezéssel, ha a »véges számú« megszorítást feladjuk; erről a későbbiekben beszélünk.

Gyakorlat szempontjából *az explicit alakban* megadható algebrai függvények

fontosak, a transzcendens függvények közül pedig az exponenciális és trigonometrikus függvények bírnak a legnagyobb jelentőséggel, inverzeikkel, a logaritmus-, arcus- és area-függvényekkel együtt. Összefoglalva:

Algebrai függvények (véges számú algebrai műv.)

1. Racionális egész függvény (véges számú összeadás, kivonás, szorzás [hatványozást ismételt szorzásnak tekintjük] fordul benne elő).
2. Racionális tört-függvények (az előbbieken kívül véges számú osztás is fellép).
3. Irracionális függvények (az előbbieken kívül még véges számú gyökvonás is előfordul).

Transzecendens függvények

Minden más függvény.

Feladatok:

1. § *a) α) β) és γ)*

1. Ábrázoljuk a levél súlya és a postai tarifa közötti összefüggést.

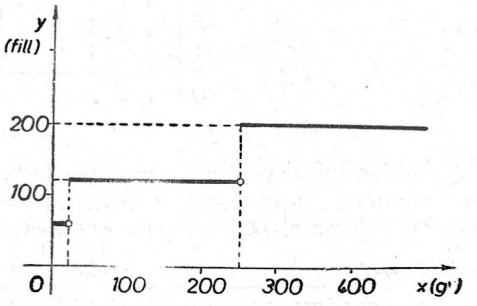
Megoldás:

a) Tekintettel arra, hogy a levél súlya tőlünk függ, a tarifa viszont a postától, célszerű a súlyt választani független változónak (jelöljük a változót x-szel), a tarifát pedig függő változónak (jelöljük y-nal).

b) A független változó szóba jöhető értékei $x = 0$ és $x = 500$ között vannak. Ezt így szoktuk jelölni: $0 < x \leqq 500$.

Negatív és 0 súlyú levél ugyanis nem létezik, 500 g-nál *súlyosabb* levelet pedig a posta nem fogad el.

Matematikailag természetesen nem lenne akadálya annak, hogy a kapcsolatot negatív x-ekre, ill. 500 g-nál nagyobb független változókra is kiterjesszük, pl. úgy, hogy tetszés szerinti értékeket rendelnénk ezen változó értékekhez — ezt az eljárást a függvény folytatásának nevezzük —, s ha szükség van rá, meg is tesszük. Jelen példánkban természetesen felesleges.



2. ábra

c) Grafikont l. 2. ábrán!

d) Tekintettel arra, hogy a posta úgy rendelkezett, hogy a 20 g súlyú levél tarifája még 60 f, az ennél bármennyivel súlyosabbé 120 f, ugyanígy $x = 250$ esetben a tarifa még 120 f, de az ennél bármennyivel súlyosabbé már 200 f stb., ezért az $x = 20$ értékhez az $y = 60$ értéket, az $x = 250$-hez $y = 120$-at rendeljük. Ezt az ábrában nullkörrel érzékeltettük, de külön is meg kell jegyeznünk. Azilyen helyeket — a rajzból azonnal érthetően — a függvény *szakadási helyeinek* nevezzük. Ezekre vonatkozón tehát a függvényérték tekintetében külön rendelkezéseket szükséges megadni.

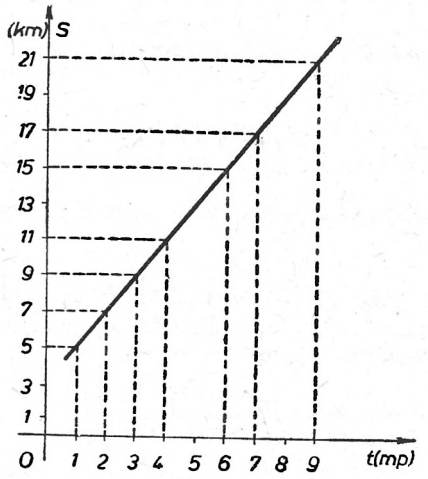
2. Ábrázolandó függvénygörbével az alábbi értéktáblázat (menettáblázat):

mért idő: t mp	1	2	3	4	6	7	9
ezalatt megtett út: s km	5	7	9	11	15	17	21

Megoldás:

a) A feladat természetéből következik, hogy nem lehet szó pontos szerkesztésről. A megadott pontokat érzés szerint kell összekötnünk. Jelen példában ez igen könnyű.

b) Az út—idő diagram; (a «menetdiagram»:)

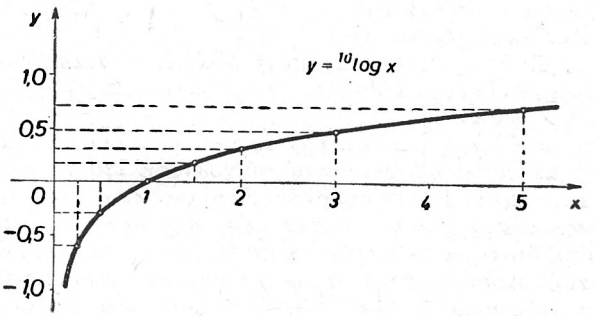


3. ábra

3. Ábrázoljuk az alábbi számok és (függvénytáblázatból kiolvasott) logaritmusaik közt fennálló kapcsolatot a hozzájuk tartozó pontokkal, melyeket érzés szerint összekötünk sima (törésmentes) görbével:

szám: x	0,25	0,5	1	1,5	2	3	5
a logaritmusa: y	−0,602	−0,301	0,0	0,176	0,301	0,477	0,699

Megoldás:



4. ábra

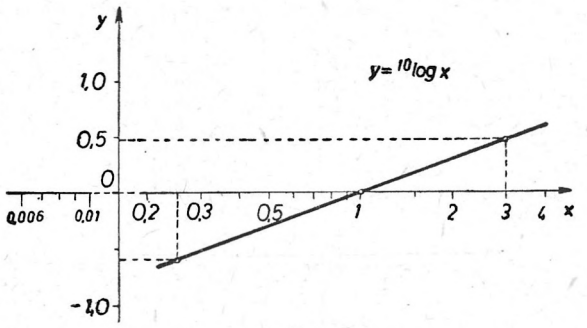
Ábrázoljuk az előbbi függvénykapcsolatot

a) egyszer logaritmikus,

b) kétszer logaritmikus beosztású koordinátarendszerben.[1]

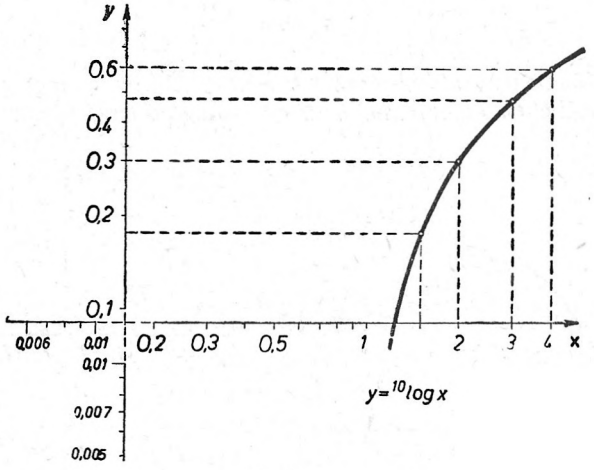
Megoldás:

a)



5. ábra

b)



6. ábra

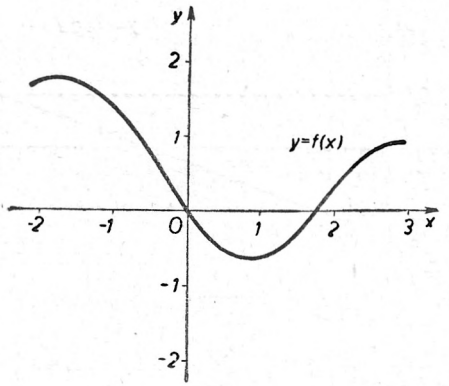
5. Ábrázoljuk (az előző példák módjára megrajzolt) görbével az alábbi táblázatban adott függvényt. Olvassuk le az ábráról az $x = 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5$ értékekhez (gyak-

[1] A logaritmikus beosztás úgy készul, hogy a «tengelyekre» az egyes számok logaritmusát mérjük fel, de a nyert osztáspontokhoz magukat a számokat jelöljük be. A logaritmikus skálákon így nincs negatív abszcissza, sőt a 0-nak megfelelő pont is a «végtelenben van». Így az ilyen koordinátarendszerekben a «tengelyek» elvileg nem ábrázolhatóak. Bővebben l. 9. § *b*.

ran *hely*-nek is hívjuk a független változó megadott értékét) tartozó függvényértékeket:

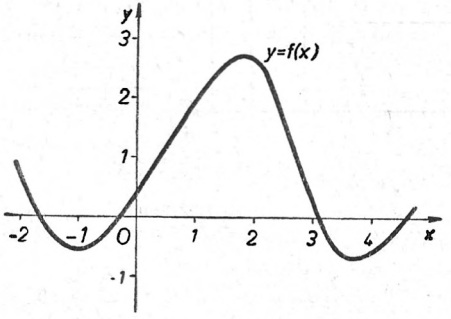
x	0	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
y	—1,5	—1,0	0,0	3,2	2,6	0,0	—1,8	—2,8	0,0

6. Adva egy függvénykapcsolat görbéjével (l. 7. ábrát). Másoljuk át a görbét milliméter papírra, majd foglaljuk kb. 10 értékpárt tartalmazó táblázatba a függvénykapcsolatot.

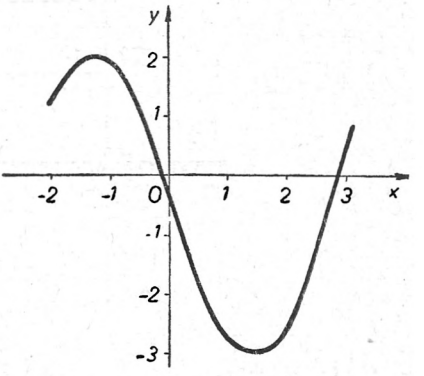


7. ábra

7. Adva egy függvény grafikonjával (l. 8. ábrát). Állapítsuk meg, illetőleg határoljuk el azon x-értékeket, amelyeknél a függő változó 0 értékű, amelyeknél pozitív, illetve negatív.



8. ábra



9. ábra

8. Adva egy függvény görbéjével (l. 9. ábrát). Mely x-értéknél (mely helyeken) veszi fel y a:

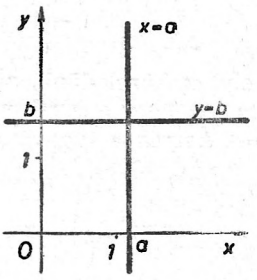
$+2$; $+0{,}5$; $0{,}0$; $-1{,}5$; $-2{,}0$, illetve $-3{,}0$

értéket?

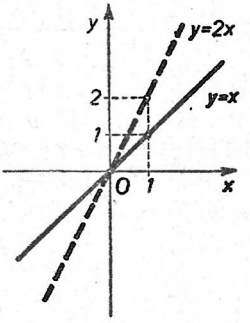
9. Állapítsuk meg, hogy az előző példában szereplő függvénynek milyen x-értéknél van maximuma, ill. minimuma. Állapítsuk meg továbbá, hogy a függvény mely helyeken vált előjelet.

10. Ábrázoljuk az $y = b$ és az $x = a$ (konstans) függvényeket! *Megoldás:* lásd a 10. ábrán.

11. Ábrázoljuk az $y = x$ és az $y = 2x$ (lineáris) függvényeket! *Megoldás:* lásd a 11. ábrán.



10. ábra



11. ábra

12. Ismert görbék felhasználásával, ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

a) $y = |x|$, *b)* $y = |2x|$, *c)* $y = |^{10}\log x|$,
d) $y = |\sin x|$, *e)* $y = |x - 1|$.

Megjegyzés: $|x| = x$, ha $x \geq 0$ és $|x| = -x$, ha $x < 0$.

13. Ismert görbék felhasználásával, ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

a) $y = \{x\}$, *b)* $y = x - \{x\}$, *c)* $y = \{|x|\}$;
d) $y = \{^{10}\log x\}$, *e)* $y = {}^{10}\log x - \{^{10}\log x\}$.

Megjegyzés: a $\{x\}$ az x *egész része** (tehát ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... értékű), az $x - \{x$ pedig (pozitív, valódi) *tört része* (tehát a [0, 1] közön változik). — Hogy nevezzük a *d)* és az *e)* függvényt? —

Az alább megadott függvénykapcsolat segítségével x néhány alkalmasan felvett értékéhez számítsuk ki a függvényértéket. Az így kapott értékpároknak megfelelő pontokat kössük össze sima (törésmentes) görbével, hogy jó képet nyerjünk a függvényről!

14. $y = -3x$,
15. $y = 2x - 4$.
16. $y = -3x + 1$.
17. $3x + 5y = 4$.
18. $y = x^2$.
19. $y = -x^2$.
20. $y = 2x^2$.
21. $y = x^2 - 2x$.
22. $y = -2x^2 + 6x$.
23. $y = x^2 - 5x + 6$.
24. $y = x^2 - 2x + 1$.
25. $y = -x^3$.
26. $y = -x^4 + 1$.

27. Keressük ki az alábbi függvény zérushelyeit (azaz azokat az x-értékeket, amelyeknél a függvény 0 értéket vesz fel)!

$$y = (x+5)(x+1)(x-1)(x-2)(x-5)$$

Megoldás: A függő változó 5 tényező szorzata. Bármely szorzat akkor (és csak akkor) 0 értékű, ha tényezői közül legalább az egyik 0. Az első tényező az $x = -5$

* A $\{x\}$ szokásos, francia elnevezése: entier x.

helyen, a második az $x = -1$, a harmadik $x = 1$, a negyedik $x = 2$, az ötödik pedig $x = 5$ helyen válik 0-vá. A függvény 0-helyei tehát: $x_1 = -5$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 5$.

28. Készítsünk értéktáblázatot és ennek alapján vázlatos grafikont az $y = \frac{1}{x}$ függvényről![1]

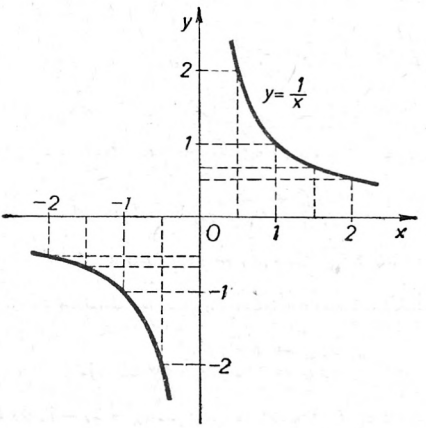
Megoldás:

a)

x	1	2	3	4;	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$; ...;	-1	-2	-3;	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$;	2	3	4; ...;	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$;	-2	-3

Figyeljük meg, hogy ha x értékével a 0 helyhez közeledünk, akkor y értéke minden határon túl nő, illetve csökken, attól függően, hogy a «pozitív vagy a negatív x-ek oldaláról» közelítünk-e. Magán az $x = 0$ helyen a függvény nincs értelmezve!

b) Az ábra:



12. ábra

9. Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{x^2}$ függvényt! Figyeljük meg, hogy a görbe az y-tengelyre szimmetrikus. Mi ennek az oka? (Vegyünk fel alkalmasan értéktáblázatot!)

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! (Értéktáblázattal; a kapott pontokat sim. görbével összekötve!)

[1] Függvénykapcsolatok grafikonjai legtöbb esetben körzővel és vonalzóval *nem* szerkeszthető görbék. Ilyen esetekben az ábrázolásnál meg szoktunk elégedni azzal, hogy annyi pontot veszünk fel értéktáblázat segítségével, amennyi segítségével könnyen sima (törésmentes) görbét tudunk átvezetni a pontokon. Gyakran még ennél kevesebbel is megelégszünk; csak a görbe «menetét», jellegzetességeit (pl. emelkedő, eső szakasz, zérushely, pólus, aszimptotikus viselkedés, szélső értékek stb.) igyekszünk megállapítani, a részletekben nem kívánva pontosságot (kvalitatív és nem kvantitatív jellemzést akarunk adni). A jellegzetességek vizsgálatához szükséges segédeszközöket azonban csak a későbbiekben ismerjük meg (részben ebben, részben a későbbi fejezetekben), így a következő feladatoknál leghelyesebb annyi pontot ábrázolnunk értéktáblázat segítségével, amennyi a görbe felrajzolását lehetővé teszi. Célszerű azonban visszatérni és ellenőrizni megoldásainkat, ha a fejezet nagy részét már megismertük!

30. $y = x + \frac{1}{x}$.

31. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

(Figyeljük meg, hogy nagy x-értékeknél a görbe mindinkább az x-tengelyre simul. Ezt úgy szoktuk kifejezni: az x-tengely a görbe aszimptotája).

32. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

33. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

Vessük össze az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény grafikonjával!

Trigonometrikus táblázat segítségével ábrázoljuk a következő függvényeket:

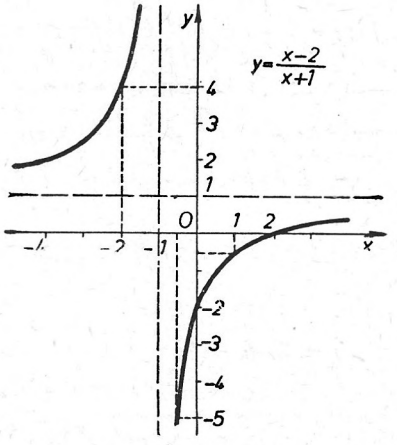
34. $y = \sin x$. 35. $y = 2\cos(x-1)$. 36. $y = 3\operatorname{tg} 2x$.

1. § b) α)

1. Adva van az $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ függvény. Keresendők az $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; ...; $f(-2)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{2})$ függvényértékek.

Megoldás: Az $f(x)$ fenti képletébe a felsorolt x-értékeket rendre behelyettesítjük, és nyerjük a keresett függvényértékeket. Pl. $f(-2) = \frac{-2-2}{-2+1} = \frac{-4}{-1} = 4$. Állapítsuk meg a további értékpárokat, és ábrázoljuk a függvényt.

x	0	1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	...
$f(x)$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	4	-5	$-0{,}245$	...



13. ábra

2. Adva a $\varphi(t) = t^3 - 1$ függvény. Keresendők a $\varphi(1)$; $\varphi(a)$; $\varphi(a+1)$, ill. $\varphi(a-1)$ függvényértékek.

Megoldás: mint előbb. Pl. egy értékpárt kiszámítva

$$\varphi(a+1) = (a+1)^3 - 1 = a^3 + 3a^2 + 3a.$$

3. Adva az $F(z) = 2^{z-2}$ függvény; keresendő $F(0)$; $F(2)$; $F(3)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$.

Megoldás:

z	0	2	3	-1	2,5
$F(z)$	$\frac{1}{4}$	1	2	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$

Pl. $F-(1) = 2^{-1-2} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$;

$F(2{,}5) = 2^{2,5-2} = 2^{0,5} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

4. Adva $f(u) = u \cdot a^u$; keresendő $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f(a)$; $f(-a)$.

Megoldás: Pl.: $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot a^{\frac{1}{a}} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{a}} = a^{\frac{1}{a}-1} = a^{\frac{1-a}{a}}$.

5. Adva: $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$; keresendő $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$; $\varphi(b)$; $\varphi\left(\frac{1}{b}\right)$. $\varphi(\sqrt{b})$.

6. Adva $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Milyen x-értékeknél teljesül az $f(x) = f(0)$, illetve az $f(x) = f(-1)$ egyenlőség?

Megoldás: $f(0) = 3$; tehát az $x^2 - 2x + 3 = 3$ másodfokú egyenlet másik megoldását kell megkeresnünk. Vagy pedig a másodfokú parabola ismeretében: az $x_0 = 1$ helyre vonatkozó szimmetrikus x-helyeken a függvényértékek egyenlők. Ezek szerint

$$f(0) = f(2) = 3; \quad f(-1) = f(3) = 6.$$

7. Adva $\varphi(t) = t^3 + 1$. Határozzuk meg a $\varphi(t^2)$ és $[\varphi(t)]^2$ függvényt. Mi különbözteti meg a két függvényt?[1]

8. Bebizonyítandó az $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ függvényre vonatkozólag, hogy $F(a) = F(-a)$.

9. Adva $\Phi(z) = z^3 - 5z$. Bebizonyítandó, hogy $\Phi(-z) = -\Phi(z)$.

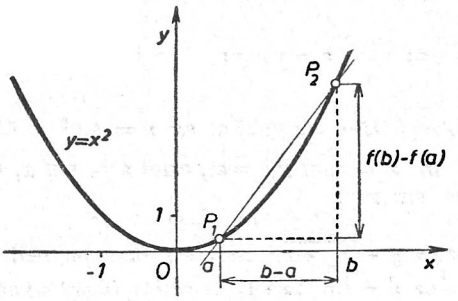
10. Bizonyítandó, hogy az $f(t) = 2t^2 + \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2} + 5t$ függvény minden t-re kielégíti az $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ egyenlőséget. (A $t = 0$ hely kivételével!)

11. Adva $f(x) = x^2$. Ábrázoljuk és vizsgáljuk meg az $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ hányados geometriai jelentését.

Megoldás: Legyen pl. $b = 3$, $a = 1$.

[1] Az első esetben az eredeti t függetlenváltozó-értékek helyett azok négyzetéhez rendelt függvényértékeket keressük, a másikban viszont az eredeti függvény értékeit emeljük négyzetre. A kettő általában *nem egyenlő*. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a trigonometrikus függvényeknél igen érdekes jelölést használunk a két eset megkülönböztetésére!

Az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alakzat a $\overline{P_1P_2}$ szelő iránytangense, ha $P_1(a; f(a))$ és $P_2(b, f(b))$ koordinátájú pontok.



14. ábra

12. Tekintsük az előző példában szereplő b-t változónak, jelöljük z-vel, és adjuk meg az $u = \varphi(z) = \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ függvénykapcsolat egyszerűbb alakját. Mi a geometriai jelentése az $u = \varphi(z)$ függvénynek?

13. Adva $f(x) = x^3 - x$ függvény. Meghatározandó az $f[f(x)]$ függvény és az $f\{f[f(0)]\}$ érték.

Megoldás:

$$a)\ f[f(x)] = f[x^3-x] = (x^3-x)^3-(x^3-x) = x^9-3x^7+3x^5-2x^3+x.$$

$$b)\ f(0) = 0^3-0 = 0;\ f[f(0)] = f[0] = 0; \ldots;\ f\{f[f(0.)]\} = 0.$$

(Azt a műveletet, amikor egy függvényoperációt többször egymás után alkalmaznak, *iterációnak* hívják. Később majd bőven találkozunk vele.)

1. § b) β)

1. Adva $y = z^2$ és $z = x+1$. Keresendő $y = f(x)$.

Megoldás: $y = z^2 = (x+1)^2 = x^2+2x+1 = f(x)$.

közvetítő z változó kiküszöbölésével előállítottuk x és y közvetlen kapcsolatát.

Adva $y = z^2$; $z = \sqrt[3]{x+1}$; $x = a^t$. Felírandó y mint t függvényel

Megoldás: Cél a közvetítő változók (z és x) kiküszöbölése;

$$y = z^2 = (\sqrt[3]{x+1})^2 = (x+1)^{\frac{2}{3}} = (a+1)^{\frac{2}{3}} = f(t).$$

3. Adva $y = \sin x$; $v \equiv \log y$; $u \equiv \sqrt{1+v^2}$. Felírandó $u = \varphi(x)$!

4. Adva $y = 1+x$; $z = \cos y$; $v = \sqrt{1-z^2}$. Keressük a $v = F(x)$-et.

5. Fejezzük ki egyszerű függvényekkel az $y = \sin^3 x$ összetett függvényt.

Megoldás: $y = \sin^3 x = (\sin x)^3 = z^3$, ahol $z = \sin x$, tehát $y = \sin^3 x$ így is felírható: $y = z^3$; $z = \sin x$.

6. Hasonló a feladat az $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$ összetett függvénynél!

7. Hasonló a feladat az $y = \sin^3(2x+1)$ összetett függvénynél!

8. Rajzoljuk meg a tanult szerkesztés alapján az $y = x^4$ görbe néhány pontját az $y = u^2$ és az $u = x^2$ jól ismert görbék segítségével!

Szerkesszük meg hasonlóképpen a következő függvények grafikonját:

9. $y = (x+1)^3$. **10.** $y = \sqrt{3x-1}$.

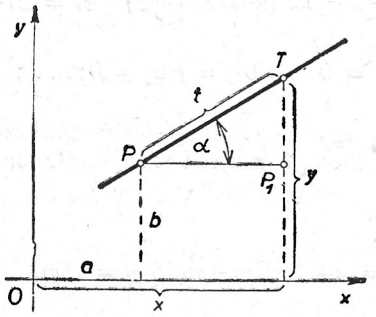
Fejezzük k egyszerű függvények segítségével az alábbi összetett függvényeket:

11. $y = \log \operatorname{tg}^2 (3x-1)$. **12.** $y = 5^{(3x+1)^2}$.

13. $y = \sqrt[3]{[1+a^{tg^2(x+1)}]^2}$. **14.** $y = \operatorname{tg}^3 (a^{\sqrt{1-9x^2}})$.

1. § c) α)

Írjuk fel a $P\,(a, b)$ ponton átmenő, α irányszögű egyenes paraméteres egyenletrendszerét, paraméterként a »futópontnak», T-nek az adott P pontból mért t távolságát felhasználva.



15. ábra

Megoldás: Felvesszük a tetszés szerinti helyzetű T ún. futópontot, bejelöljük a hozzátartozó t paraméterértéket, az x és y koordinátákat. Feladatunk: az ismert adatokból és az egyenesre jellemző geometriai törvényszerűségekből x-et és y-t kifejezni a t segítségével. A 15. ábrába bejelölve az ismert adatokat, azonnal

szemünkbe ötlik a PP_1T derékszögű háromszög. Ennek PP_1 befogóját kétféleképp is mérni tudjuk:

$$\overline{PP_1} = x - a$$

$$\overline{PP_1} = t \cos \alpha$$

Ebből azonnal adódik is a keresett egyenletek egyike:

$$x - a = t \cos \alpha$$

$$x = a + t \cos \alpha$$

Hasonlóképp a P_1T befogót is kétféleképp mérhetjük:

$$\overline{P_1T} = y - b; \qquad \overline{P_1T} = t \sin \alpha$$

Ebből:

$$y = t \cdot \sin \alpha + b$$

A keresett egyenletrendszer:

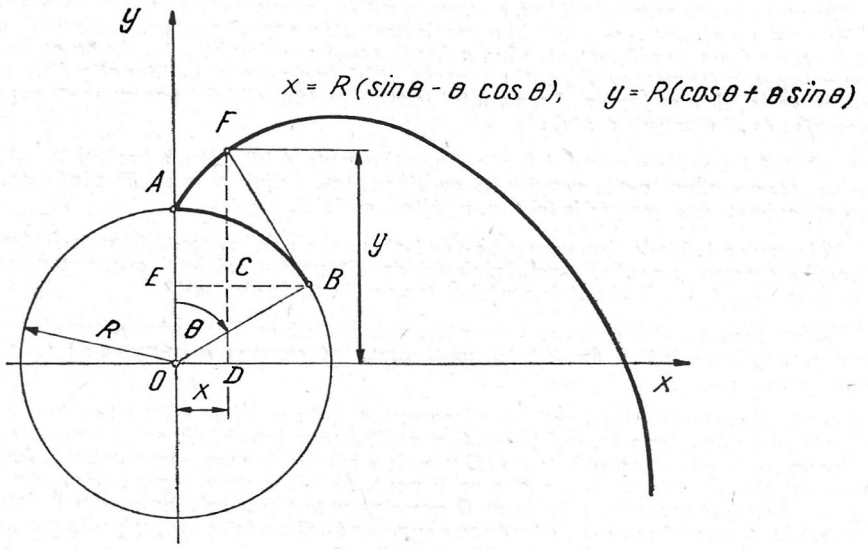
$$x = a + t \cos \alpha$$

$$y = b + t \sin \alpha$$

2. Fogaskerekek fogprofilját körevolvens profilúra marják. A körevolvens így származtatható: Az R sugarú körön legördül egy egyenes. Ezen egyenes valamely kiválasztott T pontja eközben leírja a körevolvensnek nevezett görbét. Határozzuk meg ezen görbe paraméteres egyenletrendszerét, a gördülő egyenes és kör érintkezési pontjába mutató sugár és egy fix egyenes által bezárt Θ szöget választva pl. paraméternek.

Megoldás:

1. Hogy az egyenletrendszer lehető egyszerű legyen, helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a kör középpontjába, válasszuk az y-tengelyt fix iránynak. Az egyenesen válasszuk ki azt a pontot, amely az egyenes aon helyzeténél, amikor a merőleges volt az y-tengelyre, éppen érintkezett a körrel.



16. ábra

Hogy az egyenletrendszert felírhassuk, először azt kell tisztáznunk, mit jelent geometriailag a «gördülés» — a csúszásmenetes gördülés. Ennek geometriai jelentése, hogy ez egymáson legördülő ívdarabok ívhossza egyenlő. A 16. ábra jelöléseivel:

$$\overset{\frown}{AB} = \overline{BF}$$

Felveszünk tehát egy tetszés szerinti Θ paraméterértéket, a hozzátartozó F futópontot, bejelöljük Θ, x és y értékét, és meghatározzuk az x és Θ, valamint y és Θ összefüggését. Mindenekelőtt összegyűjtjük a geometriai összefüggések által már meghatározott adatokat:

$$\overset{\frown}{AB} = R\Theta$$

$$\overline{BF} = \overset{\frown}{AB} = R\Theta$$

$$CRF\sphericalangle = \Theta \qquad \text{(merőleges szárú szögek!)}$$

$$x = \overline{EB} - \overline{CB}$$

$$y = \overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF}$$

Az $OBE\triangle$-ből azonban $\overline{EB}$ és $\overline{DC} = \overline{OE}$, a $CBF\triangle$-ből pedig $\overline{CB}$ és $\overline{CF}$ igen egyszerűen meghatározható, mert mindkét derékszögű háromszögben ismerjük az átfogót és egyik szöget.

$$\overline{EB} = \overline{OB} \cdot \sin\Theta = R \cdot \sin\Theta$$

$$\overline{DC} = \overline{OE} = \overline{OB} \cdot \cos\Theta = R \cdot \cos\Theta$$

$$\overline{BC} = \overline{BF} \cdot \cos\Theta = R \cdot \Theta \cdot \cos\Theta$$

$$\overline{CF} = \overline{BF} \cdot \sin\Theta = R \cdot \Theta \cdot \sin\Theta$$

Ezzel már fel is írhatjuk az egyenletrendszert:

$$x = R \cdot \sin\Theta - R \cdot \Theta \cdot \cos\Theta = R(\sin\Theta - \Theta \cdot \cos\Theta)$$

$$y = R \cdot \cos\Theta + R \cdot \Theta \cdot \sin\Theta = R(\cos\Theta + \Theta \cdot \sin\Theta)$$

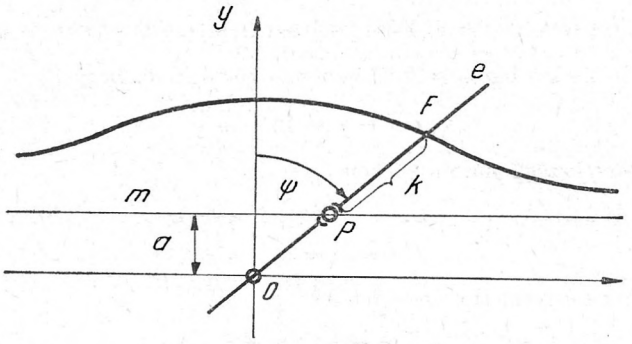
3. R sugarú kerék végiggördül az e egyenesen. Válasszuk a koordinátarendszer x-tengelyéül fenti e egyenest. Jelöljünk ki a kerék kerületén egy F pontot. Helyezzük oda a koordinátarendszer kezdőpontját, ahol a kerék az F pontban érintkezik az egyenessel. Válasszuk paraméternek az F pontba mutató küllő és a negatív y-féltengely által bezárt φ szöget, és adjuk meg így az F pont által leírt pálya (ún. ciklois) paraméteres egyenletrendszerét, és ábrázoljuk a görbét.

4. Az előző feladatban szereplő kerék F pontba mutató küllőjén, a kerék középpontjától $\alpha \cdot R$ távolságban ($\alpha < 1$) vegyük fel az F' pontot. Adjuk meg az F' pont által leírt pálya egyenletét, és rajzoljuk is fel (ún. nyújtott ciklois).

5. Válasszuk a 4. feladatban szereplő α-t és 1-nél nagyobbnak, és jelöljük az $\alpha \cdot R$ távolsággal meghatározott pontot F''-vel. Írjuk fel az F'' pont által leírt görbe paraméteres egyenletrendszerét, és ábrázoljuk a görbét (az ún. hurkolt cikloist)!

6. Adjuk meg a $P(0,b)$ ponton átmenő, α irányszögű egyenes paraméteres egyenletrendszerét, ha az origóból az F futó pontba mutató egyenes φ irányszögét választjuk paraméternek.

7. A 17. sz. ábrán látható O-jelű, csapágyazott, a papír síkjában elforgatható csúszóperselyben csúszik az e tengely, amelynek P pontjához egy másik, D: csapágyazott csúszópersely van elforgathatóan rögzítve. A D persely a rögzített m tengelyen csúszik. Az e tengelyen a P ponttól k távolságban van az F pont. Adjuk meg az F pont által leírt pálya paraméteres egyenletrendszerét, ha az O perselyt választjuk origónak, az x tengelyt az m-mel párhuzamosnak; az y-tengely és az e egyenes által bezárt φ szöget pedig paraméternek; x és m távolsága: α. (Conchoid.)



17. ábra

(A P pont egyszersmind a D csuszóperselyt is jelképezi)

8. A 7. feladatban szereplő görbe paraméteres egyenletrendszerét a t távolságparaméter segítségével írjuk le! t jelenti a D persely távolságát az y-tengelytől.

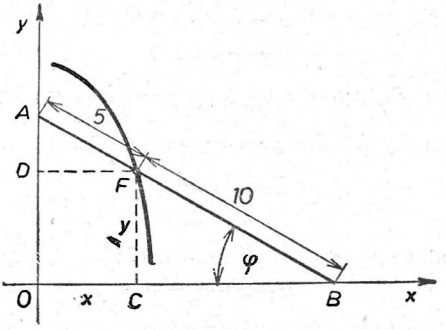
9. Az R sugarú kör belső ívén gördül az $\frac{R}{4}$ sugarú kör. Válasszuk ki az utóbbin találomra az F pontot. Tekintsük a nagyobb kör középpontját origónak. Kössük össze ezt a nagyobb kör azon pontjai egyikével, ahol a két kör gördülés közben az F pontban érintkezik. Válasszuk ezt az egyenest x-tengelynek. A pillanatnyi érintkezési pontba húzott egyenesek (ún. rádiuszvektorok) irányszögét jelöljük φ-vel. Adjuk meg az F pont által leírt pálya egyenletrendszerét a φ paraméter segítségével. (Astrois, 1. 1. § *c) β)* 5.-ben is.)

1. § *c) β)*

1. Egy 15 m hosszú létrán, annak talpától 10 m távolságra áll egy festő. A létra talpa a vízszintes alapra, teteje sima függőleges falra támaszkodik. Milyen pályát ír le a festő lába, ha a létra megcsúszik?

Megoldás:

A 18. ábrán lerajzoltuk a csúszás egyik pillanatát. Először a «mozgásegyenleteket.» fogjuk felírni, éspedig a létra φ irányszöge segítségével, mert ez lényegesen egyszerűbb Azután a φ paraméter kiküszöbölésével meghatározzuk az x és y közvetlen kapcsolatát s ebből a görbe jellegét.



18. ábra

A futó pontot (a festő lábát) F-fel jelöltük. Berajzoltuk a „tetszés szerinti" φ paraméterértéket, a keresett x és y koordinátákat.

A CBF derékszögű háromszögből azonnal leolvasható, hogy

$$\overline{CF} = y = 10 \cdot \sin \varphi$$

Az ADF derékszögű háromszögben

$$DFA \sphericalangle = CBF \sphericalangle = \varphi$$

Így

$$\overline{DF} = x = 5 \cdot \cos \varphi$$

A paraméteres egyenletrendszer tehát:

$$x = 5 \cdot \cos \varphi$$

$$y = 10 \cdot \sin \varphi$$

A paraméter kiküszöbölése legegyszerűbben a jól ismert $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ reláció felhasználásával történik.

Az első egyenletből:

$$\cos^2 \varphi = \frac{5^2}{x^2};$$

ugyanigy a másodikból:

$$\sin^2 \varphi = \frac{y^2}{10^2}$$

Így

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 = \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{10^2}$$

Ez pedig egy 5 fél-kistengely és 10 fél-nagytengely hosszúságú ellipszis egyenlete, amelynek magtengelye az y-tengellyel (a függőleges fallal) párhuzamos.

2. Határozzuk meg az **1.** § *c*) 3. feladatban leirt ciklois $x = f(y)$ alakú egyenletét!

3. Az **1.** § *c*) *a*) 1. feladatban felírtuk a $P(a, b)$ ponton átmenő α irányszögű egyenes egyenletrendszerét. Küszöböljük ki ebből a t paramétert.

4. Határozzuk meg, hogy mely $x = f(y)$ függvény grafikonja az **1.** § *c*) *a*) 7. feladatában ismertetett nchoid.

5. Az astrois nevű görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cdot \cos^3 t$$

$$y = a \cdot \sin^3 t$$

Ábrázoljuk a görbét, és adjunk meg, hogy mely $y = f(x)$ függvényekn a grafikonja

6. Mely $y = f(x)$ függvény paraméteres egyenletrendszerét írhatjuk így:

$$y = t^3 - 3t$$

$$x = t^2 - 2t$$

Megoldás: A második egyenletből t kifejezhető:

$$t^2 - 2t - x = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+4x}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+x}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+x}$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$y = (1\pm\sqrt{1+x})^3 - 3(1\pm\sqrt{1+x}) =$$

$$= 1\pm 3\sqrt{1+x} + 3(1+x) \pm (1+x)^{\frac{3}{2}} - 3\mp 3\sqrt{1+x} =$$

$$= -2+3+3x\pm(1+x)^{\frac{3}{2}}.$$

Azaz $y = 1+3x\pm(1+x)^{\frac{3}{2}} = f(x)$ adódik.

7. Adott az $y^3 - 10xy + x^3 = 0$ implicit függvény. Készítsünk hozzá értéktáblázatot.

Megoldás: Látható, hogy egyszerű módon nem érünk célt. Akár x, akár y helyébe helyettesítünk valamely értéket, a másik változó ehhez tartozó értékét harmadfokú egyenletből kellene kiszámítani. Meg kell tehát kísérelnünk alkalmasan választott paraméter segítségével átalakítani a kapcsolatot paraméteres egyenletrendszerré. Tekintettel arra, hogy a kapcsolat — amint azt azonnal láthatjuk — szimmetrikus x és y-ban, a paraméter választásánál is célszerű a szimmetriát megtartani. Ki kell aknáznunk azt a tényt is, hogy a kapcsolat állandó tagot nem tartalmaz. Így ugyanis — ha a paramétert úgy választjuk, hogy a paraméter és a változók közötti kapcsolat se tartalmazzon állandó tagot — könnyű lesz a feladatot megoldanunk!

Megfelelő pl. az $y \cdot x = t$ választás.

Ebből ugyanis $y = \frac{t}{x}$. Helyettesítve:

$$\frac{t^3}{x^3} - 10t + x^3 = 0$$

$$t^2 - 10tx^3 + x^6 = 0$$

Másodfokúra visszavezethető 6-odfokú egyenletet kaptunk x-ben.)

$$x^3 = \frac{10t \pm \sqrt{100t^2 - 4t^3}}{2}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{10t \pm \sqrt{100t^2 - 4t^3}}{2}} = \sqrt[3]{5t \pm \sqrt{25t^2 - t^3}}$$

$$y = \frac{t}{x} = \frac{t}{\sqrt[3]{5t \pm \sqrt{25t^2 - t^3}}}$$

Ezen paraméteres egyenletrendszer segítségével már készíthetünk táblázatot. t valamely értékét a két egyenletbe helyettesítve egy-egy ilyen értékpárt kapunk. Pl. a $t = 1$ helyettesítéssel

$$x(1) = \sqrt[3]{5 \pm \sqrt{24}} \cong \sqrt[3]{5 \pm 4{,}9} \cong \begin{cases} 2{,}148 \\ 0{,}4645 \end{cases}$$

$$y(1) = \frac{t}{x} \cong \begin{cases} 0{,}4645 \\ 2{,}148 \end{cases}$$

Ezek közül természetesen azok az egymáshoz tartozó értékpárok, amelyeknél a két előjel közül mindkét képletben ugyanazt választottuk. Azaz:

x	0,4645	2,148	...
y	2,148	0,4645	...

Egyenleteink azonban számításra elég alkalmatlanok. Tegyünk most kísérletet pl. az

$y = u \cdot x$ egyenlettel (itt u a paraméter).

A műveleteket elvégezve, kapjuk, hogy

$$x = \frac{10u}{1+u^3}; \qquad y = \frac{10u^2}{1+u^3}$$

Ez számításra már lényegesen alkalmasabb.

8. Adjuk meg az $y^4 - 3x^2y^2 + x^4 = 0$ implicit függvénykapcsolat valamelyik paraméteres egyenletrendszerét!

9. Adjuk meg az $y^3 + 10\frac{y}{x} + \frac{1}{x^3} = 0$ implicit függvénykapcsolat valamelyik paraméteres egyenletrendszerét.

10. Az ún. «Descartes-levél» egyenlete:

$$x^3 + y^3 = 3a\,xy.$$

Megfelelő t paraméter választásával térjünk át a görbe jól kezelhető paraméteres egyenletrendszerére, készítsünk így értéktáblázatot, és ábrázoljuk a görbét.

2. §. A FÜGGVÉNY EGYES JELLEGZETESSÉGEI

a) Értelmezési tartomány — értékkészlet

Minden $y = f(x)$ függvényhez az összes «szóba jöhető» x-értékek sokasága tartozik, olyan értelemben, hogy ezen x értékeknél létezik helyettesítési érték, vagy valamilyen más módon definiált függvényérték; míg egyéb x-értékekhez nem rendelünk függvényértékeket sem a képlettel, sem külön utasítással. (A képlet pl. nem szolgáltat helyettesítési értéket a valós számok közül, vagy pedig tiltó rendelkezést mellékeltünk a kérdéses x-értékekre!)

Az x-argumentum ezen «szóba jöhető» értékeinek összességét — amire a függvény fogalmának definiálásánál céloztunk — *a függvény értelmezési tartományának nevezzük.*

Az $y = f(x)$ függvény értelmezési tartományának értékeihez rendelt y függvényértékek összességét pedig (melyben az előbbiek szerint csak valós értékek fordulnak elő) a *függvény értékkészletének (értéktartomány) nevezzük.*

Az értelmezési tartomány nem szükségképpen folytonos, összefüggő, s legkevésbé tartozik felölelni $-\infty$-től $+\infty$-ig a valós x értékek összességét! Az értelmezési tartomány és az értékkészlet (értéktartomány) lehet *zárt vagy nyílt* tartomány. (Zárt akkor, ha a tartományhoz annak határpontjai is hozzátartoznak; különben nyíltnak nevezzük a tartományt.)

Természetesen az y függő változó sem tartozik felvenni $-\infty$-től $+\infty$-ig minden valós értéket.

b) A függvény páros, ill. páratlan volta, aszimmetriája

α) **Páros függvények.** Valamely függvényt párosnak nevezünk, ha az értelmezési tartomány bármely azonos abszolút értékű, ellenkező előjelű argumentum-párjához azonos függvényérték tartozik, azaz ha

$$f(x) = f(-x),$$

bármilyen értéket vesz is fel x az értelmezési tartományban. Ilyen tulajdonsággal[1] bírnak pl. mindazok az $y = \sum_{k=0}^{n} [a_k x^k]$ hatványfüggvények, amelyekben csak páros kitevőjű tagok szerepelnek (az állandó 0-kitevőjű tagnak számít, s így ez is beleértendő). *A páros függvény görbéje az y-tengelyre szimmetrikus (tengelyszimmetria).*

β) **Páratlan függvények.** Valamely függvényt páratlannak nevezünk ha argumentumának előjelváltozása esetén a függvényérték is csak előjelét váltja, azaz

$$f(-x) = -f(x); \quad \text{illetve} \quad f(x) = -f(-x),$$

— bármilyen számot jelent is x az értelmezési tartományban.

Páratlanok például mindazon hatványfüggvények $\left(y = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right)$, amelyekben csak páratlan kitevőjű tagok szerepelnek. *A páratlan függvény görbéje a koordinátarendszer kezdőpontjára szimmetrikus (centrális szimmetria).*

γ) **A koordinátarendszerre vonatkozóan aszimmetrikus görbéjű függvények.** E függvények két nagy csoportba oszthatók:

1. Szimmetriaközépponttal, ill. tengellyel bíró görbéjű függvények.[1] Gyakran előfordul, hogy a függvénygörbe sem az y-tengelyre, sem a koordinátarendszer kezdőpontjára nézve nem szimmetrikus, de a *koordinátarendszer megfelelő mértékű eltolásával* azzá tehető. (Hogy ez miképpen érhető el, azt a koordinátarendszer eltolásának ismertetésénél fogjuk látni. 3. §.)

2. Semmiféle szimmetriatulajdonsággal nem rendelkező függvények.

[1] Ezeket a függvényeket azért soroltuk az aszimmetrikus grafikonú függvények közé, mert a függvénykapcsolat közvetlenül csak ritkán árulja el a szimmetriatulajdonságokat; ezeket legtöbbször közvetve vagy pedig a grafikonból sejtjük csak meg. Utólagos igazolásuk is más módszerrel történik, mint a páros vagy páratlan függvények szimmetriatulajdonságainak kimutatása.

c) Többértékűség

Ha valamely tartományban *a független változó* (x) *egy-egy értékéhez a függő változó több értéke tartozik*, akkor a *függvény többértékű*. Geometriailag ez abban nyilvánul meg, hogy a szóban forgó szakaszon egy bizonyos x abszcisszájú pontban az y-tengellyel párhuzamosan húzott egyenes a függvénygörbét egynél több pontban metszi.

d) Periodicitás

Valamely függvény periodikus, ha a következő feltételnek tesz eleget:

$$f(x+p) = f(x),$$

vagyis *a függvény értéke bármely x-helyen ugyanaz, mint az* $x+p$ *helyen*. A függvény értékei tehát az argumentum változása esetén periodikusan ismétlődnek. A periódus, vagyis az ismétlődés szakasza éppen p. Ilyen függvények ábrázolásánál *elegendő megrajzolni a görbét egyetlen p-hosszúságú* (x)*-szakaszon*, hiszen ebből egyszerű eltolással adódik a görbe újabb és újabb periódusnyi szakaszon.

e) Folytonosság, szakadás

Ahhoz, hogy egy $x = x_0$ helyen az $y = f(x)$ függvény folytonosságáról beszélhessünk, a függvénynek e helyen magán, ezenkívül minden olyan x-helyen értelmezve kell lennie, amelynek nem nagyobb a távolsága x_0-tól, mint egy adott k távolság. Ezen x értékek összességét az $x = x_0$ hely «környezetének», pontosabban «k környezetének» hívjuk. Amennyiben mármost az x_0-hely kis környezetéből választott függvényértékek valamennyien csak kevéssé, éspedig annál kevésbé térnek el az $f(x_0)$ értéktől, mennél kisebb a k-környezet, akkor az $y = f(x)$ függvényt az $x = x_0$ helyen folytonosnak hívjuk.

Pontosabban fogalmazva, az $y=f(x)$ *függvényt* az $x = x_0$ helyen *folytonosnak* mondjuk, *ha bármilyen kicsinyre választott* ε *számhoz megadható egy olyan* k szám, *hogy* az x_0 hely *k-környezetében* bármelyik $f(x)$ függvényérték *eltérése* $f(x)$*-tól* ε*-nál kisebb*.

Jelekben: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, hacsak $|x-x_0| < k$, bármilyen kicsiny legyen is ε. (Részletesebben l. a 10. §-ban!)

A folytonosságot eddig csak pontban értelmeztük. Folytonosságról azonban egy egész «intervallumban» is beszélhetünk. *Valamely függvényt egy adott* (a, b) *intervallumban folytonosnak nevezünk, ha a függvény* a szóban forgó egyenes *szakasz minden pontjában folytonos*, azaz bármilyen értéket jelent is x_0, az a és b értékek között $(a < x_0 < b)$, az x_0 helyen a függvény folytonos.

Ha valamely $x = x_0$ pontban a folytonosság feltételei nincsenek kielégítve, akkor itt a függvénynek *szakadási helye* van.

Ez pl. akkor következik be az $x = x_0$ helyen, ha ott a függvény egyáltalán nincs is értelmezve, vagy ha a hely bármilyen kis környezetében előfordulnak egymástól véges értékkel (pl. 0,3-mal stb.) eltérő függvényértékek.

Ha a függvény valamely $x = x_0$ helyen nincs ugyan értelmezve, de ezen hely elég kis környezetében a függvényértékek *egymástól* előírtan kevéssé különböznek csak, akkor a folytonosságot helyreállíthatjuk úgy, hogy *külön rendelkezünk az* $f(x_0)$ *értékről.* Mégpedig *úgy, hogy a függvény ezek után folytonos legyen az* $x = x_0$ *helyen.* Erre épp az adja meg a módot, hogy a függvényértékek *egymástól* elég kis környezetben az előírtnál kevésbé különböznek.

Az $y = f(x)$ függvénynek az x_0 helyen helyettesítési értéke mellett általában határértéke is van. Éspedig *A a határértéke az* $x = x_0$ *helyen, ha bármilyen kicsiny* ε *számhoz megadható a* k *szám úgy, hogy az* x_0 *hely* k *környezetében bármelyik* $f(x)$ *helyettesítési érték* (az $f(x_0)$ értéket kivéve; a határérték az $x = x_0$ helyen az *ugyanezen helyhez* tartozó helyettesítési értéktől független!!) *kevesebbet különbözik A-tól* ε*-nál.* Jelekben:

$$|A - f(x)| < \varepsilon,$$

hacsak $|x_0 - x| < k$, de $x \neq x_0$, *bármily kicsiny is* ε. (Részletesebben l. 10. §-ban.)

Ezek alapján így is fogalmazhatjuk: *az* $y = f(x)$ *függvény folytonos az* $x = x_0$ *helyen, ha ott létezik határértéke és az helyettesítési értékével egyezik!*

Arról is szoktunk beszélni, hogy az $y = f(x)$ függvénynek az $x = x_p$ helyen végtelen a határértéke (pl. az $y = \frac{1}{x^2}$ függvénynek az $x_p = 0$ helyen).

Ezen a következőket értjük:

Az $y = f(x)$ függvénynek az $x = x_p$ helyen ∞ (végtelen) a határértéke, ha bármilyen nagy n számhoz megadható a k szám úgy, hogy az x_p hely k-környezetében bármelyik $f(x)$ helyettesítési érték (az $f(x_p)$ értéket természetesen kivéve; utóbbi általában nem is létezik) n-nél nagyobb. Jelekben: $f(x) > n$, hacsak $|x - x_p| < k$; $x \neq x_p$, bármilyen nagy szám is n. Teljesen hasonló a $-\infty$ mint határérték értelmezése. (Részletesebben a 10. §-ban.)

2. § a)

Feladatok:

1. Határozzuk meg az $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{3-x}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás: Az első tag valós, ha $x \geqq -4$. A második tag valós, ha $x \leqq 3$. Eszerint a valós függvényértékeket adó x-értékek tartománya:

$$-4 \leqq x \leqq 3.$$

Határozzuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:

2. $y = 1 - {}^a\log x \ (a > 1)$.

Megoldás: A szokásnak megfelelően egynél nagyobb pozitív számot véve a logaritmusrendszer alapjának (azaz ha $a > 1$, akkor) negatív szám logaritmusa a valósban értelmetlen lévén, a függvény értelmezési tartománya: $x > 0$, vagyis a pozitív x-értékek összessége (a 0-t is kirekesztjük, mert az $x = 0$, helyen a függvénynek nincs helyettesítési értéke, csak határértéke, amely $-\infty$-nel egyenlő).

3. $y = \log(x+3)$. Értéktartomány: $-\infty < y < \infty$.

4. $y = \sqrt{5-2x}$.

5. $y = 1 + \sqrt{1-x^2}$.

Megoldás: Ott definiált, ahol $1-x^2 \geqq 0$, azaz $x^2 \leqq 1$; ebből $|x| \leqq 1$; a négyzetgyökvonás eredményét egyébként csak pozitív előjellel vegyük figyelembe. Értéktartomány így az $1 \leqq y \leqq 2$ zárt intervallum, értelmezési tartomány pedig a $-1 \leqq x \leqq 1$ zárt intervallum. Ha a gyökvonásnál mindkét előjelet figyelembe vesszük (ún. kétértékű függvény), az értéktartomány a $0 \leqq y \leqq 2$ zárt köz.

6. $y = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

Megoldás: Mindenütt értelmezve, kivéve az $x^2 = 1$, azaz $|x| = 1$ értékét; 0-val ugyanis nem oszthatunk. Értéktartomány: $-\infty < y < 0$ és $1 \leqq y < \infty$ intervallumok.

7. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$. 8. $y = \dfrac{2x}{x^2-3x+2}$. 9. $y = \sqrt{x^2-4x+3}$.

10. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

Megoldás: Mindenütt értelmezve, ahol $x^2-3x+2 > 0$, vagyis mindenütt az $1 \leqq x \leqq 2$ zárt köz kivételével. (Itt a nevező 0-helyeit is ki kell rekesztenünk!)

11. $y = \dfrac{1}{x^3-x}$.

12. $y = {}^{x}\log 2$.

Megoldás: Minden pozitív x-re értelmezve, kivéve az $x = 1$ és $x = 0$ értékeket mert 1 és 0 nem lehet semmilyen logaritmusrendszer alapszáma. Ezenkívül — egyes különleges (szinguláris) x-értékektől eltekintve — a negatív számokat is ki kell zárnunk. Tehát a $0 < x < 1$, és az $1 < x < \infty$ intervallum jelenti az értelmezési tartományt.

13. $y = \sqrt{\log \dfrac{5x-x^2}{4}}$.

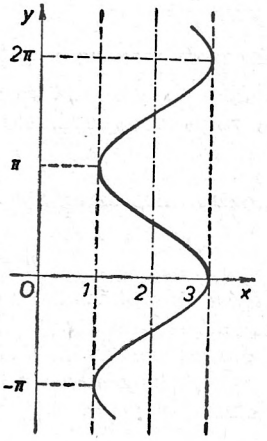
14. $y = \log(ax^2+bx+c)$.

15. $y = \arccos(x-2)$.

Megoldás:

Kell, hogy $-1 \leqq x-2 \leqq 1$ legyen, azaz

$1 \leqq x \leqq 3$ (19. ábra).



$y = \arccos(x-2)$

19. ábra

16. $y = \arcsin(2x-5)$.

17. $y = \arccos(1-2x)$.

18. $y = \arccos \dfrac{x}{4}$.

19. $y = \arcsin \dfrac{1-2x}{4}$.

20. $y = \arcsin \sqrt{2x}$.

21. $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \dfrac{3-2x}{5}$.

Megoldás: Az első tag valós, ha $-\infty < x \leqq 3$, a második tag pedig akkor, ha $-1 \geqq x \geqq +$. A függvény értelmezési tartománya tehát $-1 \leqq x \leqq 3$ (a két intervallum közös részel)

22. $y = \dfrac{3}{4 - x^2} + \log (x^2 - x)$.

23. $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$.

Megoldás: Az első tag valós, ha $\sin x \geqq 0$, vagyis ha $0 \leqq x \leqq \pi$, illetve ha $-2\pi \leqq x \leqq -\pi$ stb. A második tag valós, ha $-4 \leqq x \leqq 4$. Tehát az értelmezési tartomány: a $-4 \leqq x \leqq -\pi$ és $0 \leqq x \leqq \pi$ zárt szakaszok.

24. $y = \sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x-2}} - \log (2x - 3)$.

25. $y = \dfrac{1}{\log (1-x)} + \sqrt{x+2}$. 26. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x}}$.

27. $y = \arc\sin \dfrac{x-3}{2} - {}^2\log (4 - x)$.

28. $y = \log \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} + \dfrac{2}{9}x = \dfrac{1}{3} \log \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{2}{9}x$.

Állítsunk elő olyan függvényeket, amelyek értelmezési tartománya a következő:

29. $-2 \leqq x \leqq 2$ Ilyenek pl. az $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \arc\sin \dfrac{x}{2}$; $y = \arc\cos \dfrac{x}{2}$, stb. függvények.

30. $-2 < x < 2$, kivéve az $x = 0$ helyet.

Ilyenek pl. az $y = \dfrac{ax + b}{x\sqrt{4 - x^2}}$; $y = \dfrac{\log |x|}{\sqrt{4 - x^2}}$ stb.

31. Legyen a függvény mindenütt értelmezve, kivéve az $x = 2$, $x = 3$ és $x = 4$ helyet.

Ilyenek pl. $y = \dfrac{\sin x}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{x^2}{x-4}$.

vagy $y = \log [(x-2)^2 (x-3)^2 (x-4)^2]$ stb.

32. Adva az $y = \dfrac{\sin x}{x}$ függvény. Ez mindenütt bír helyettesítési értékkel, kivéve az $x = 0$ helyet.

Az értékkészlet (értéktartomány) meghatározása általában nagyobb matematikai apparátust igényel (szélsőértékszámítás) s emiatt itt a fogalom megvilágítására (a már bemutatottakon kívül) csak néhány egyszerű példát közlünk.

Határozzuk meg az alábbi függvények értékkészletét!

33. $y = 2x - 3$.

34. $y = x^2$.

35. $y = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$.

36. $y = \frac{1}{x}$.

37. $y = a^x$: $(a > 1)$.

38. $y = \sin 3x$.

39. $y = \log (2x - 3)$.

2. § b) α)

A páros függvény fogalmának tisztázására az eddig tanultak felhasználásával ábrázoljuk (csak a jellegre ügyelve, vagy magyarázzuk a következő függvényeket:

1. $y = x^4 - 2x^2$.

Megoldás:

$$y = x^2(x^2 - 2).$$

A függvény 0 helyei: $x_{1,2} = 0$ és $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Utóbbi két hely között az $x = 0$ hely kivételével a függvényértékek valamennyien negatívok, hiszen $x^2 < 2$, ha $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$. Ezek alapján az ábra vázlatosan megrajzolható: (20. ábra).

2. $y = 2 \cos 3x$.

3. $y = 2^{-x^2}$.

4. $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$.

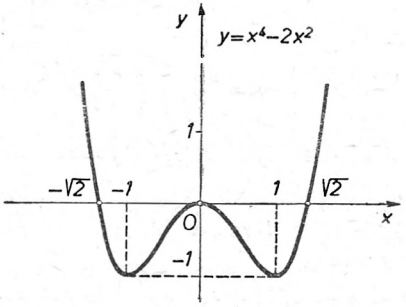
5. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6. $y = \sin x^2$.

7. $y = \frac{\sin x}{x}$.

8. $y = |x|$.

9. $y = \sin |x|$.



20. ábra

Megoldás: először megrajzoljuk a sin x függvényt pozitív x-ekre, utána pedig tükrözzük az y-tengelyen.

10. $y = |\sin x|$.

Megoldás: megrajzoljuk a sin x függvényt, majd a negatív félhullámokat tükrözzük az x-tengelyen. Így az ábra az y-tengelyre is szimmetrikus lesz.

2. § b) β)

A páratlan függvények tanulmányozása céljából — csak a jellegre ügyelve — ábrázoljuk (vagy magyarázzuk) a következő függvényeket:

1. $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

2. $y = \sin 2x$.

3. $y = \operatorname{tg} x$.

4. $y = \frac{10x - 10^{-x}}{2}$.

5. $y = x \cos x$.

(Megjegyzés: Figyeljük meg, hogy az $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ függvény mint egy páratlan és egy páros függvény hányadosa, páratlan függvény. Ez általában is igaz; e törvényszerűség az aritmetikából ismert előjelszabállyal teljesen analóg: két egyenlő paritású függvény szorzata vagy hányadosa páros függvényt ad, két különböző paritású függvény szorzata vagy hányadosa pedig páratlan függvényt eredményez.
Ennek indokolását részben az olvasóra bízzuk!)

6. Mutassuk ki, hogy két páratlan függvény szorzata vagy hányadosa páros függvény!

Megoldás:

a) Az $y = f(x)$ és az $u = \varphi(x)$ függvények legyenek páratlanok. Érvényes tehát rájuk az előbbiekben felírt «függvényegyenlet»:

$$f(-x) = -f(x).$$

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

b) Vizsgáljuk meg a $z(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ függvényt. Erre fennáll a következő függvényegyenlet:

$$z(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x) = [-f(x)] \cdot [-\varphi(x)] = f(x) \cdot \varphi(x) = z(x).$$

Azaz: $z(-x) = z(x)$; a függvény valóban páros!

7. Igazoljuk, hogy páros és páratlan függvény szorzata, ill. hányadosa páratlan függvény!

8. $$y = x \cdot |x|.$$

(Megjegyzés: Szerkesztése pozitív x-értékeknél megegyezik az $y = x^2$ parabolával, $x < 0$ esetén pedig az y-tengelytől jobbra levő ágat tükrözzük a koordinátarendszer kezdőpontjára.

2. § b) γ)

1. $y = x - x^2$. Állapítsuk meg a görbe szimmetriavonalának helyét!

Megoldás: $$y = x - x^2 = x(1 - x).$$

A 0-helyek tehát $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. A görbe legmagasabb pontja

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$$

értéknél van. E helyen $$y = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

A parabola szimmetriatengelye az $x = \dfrac{1}{2}$ egyenletű egyenes!

egyébként az 5. § c)-t is!)

$$y = \sin x - \cos x.$$

Találunk-e szimmetriatulajdonságokat?
A feladat grafikusan megoldható pl. az $y = \sin x$ és $u = -\cos x$ szuperpozíciójaként

a megfelelő ordináták (algebrai) összegezésével; a felelet az ábrából olvasható ki. De megoldható a

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

átalakítás segítségével is. (L. 8. §.)

3. $y = x^2 - 6x + 5.$

Ábrázolandó és megállapítandó a szimmetriatengely.

Szimmetriával nem bíró függvények. Ezeknek nincs szimmetriaközéppontjuk, sem szimmetriatengelyük.

Példák:

4. $y = 2^x.$

Ábrázolandó vázlatosan!

5. $y = x^2 - \sin x.$

Ábrázoljuk vázlatosan, értéktáblázat alapján.

6. $y = \log x.$

Figyeljük meg a 4. ábrát!

2. § c)

Vázlatosan ábrázoljuk és magyarázzuk a következő függvényeket:

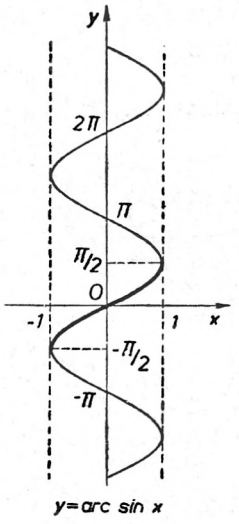
1. $y = \text{arc sin } x.$

Megoldás:

Ez végtelen sokértékű függvény, mert végtelen sok olyan arcus (ív) van, amelynek a sinusa éppen x. (21. ábra.)

Az ábrán vastagítottuk a függvény ún. főértéktartományát. (L. 8. §.)

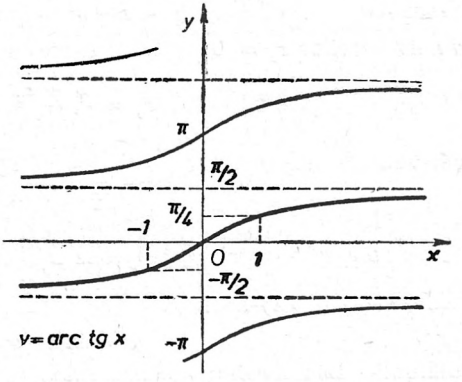
2. $y = \text{arc tg } x.$



21. ábra

Megoldás:

Hasonló okból végtelen sokértékű, mint az előbbi függvény. (22. ábra.)

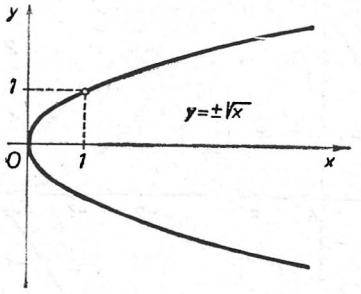


22. ábra

3. $$y = \pm\sqrt{x}.$$

Megoldás:

A négyzetgyök kétértékűsége miatt kétértékű függvény.



23. ábra

4. $$y = \pm\sqrt{x-2}.$$

Megoldás:

Ugyancsak kétértékű függvény, a négyzetgyök kétértékűsége következtében

5. $$(x-2)^2 + y^2 = 9.$$

Megoldás:

Kétértékű függvény, implicit alakban. (Fel kell ismernünk, hogy milyen kúpszeletl)

6. $$y = \pm x\sqrt{x(1-x)}.$$

7. $$x^4 + y^4 = 8xy^2.$$

(Az y-értékeket a másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletből számítjuk az értéktáblázathoz!)

Megoldás:

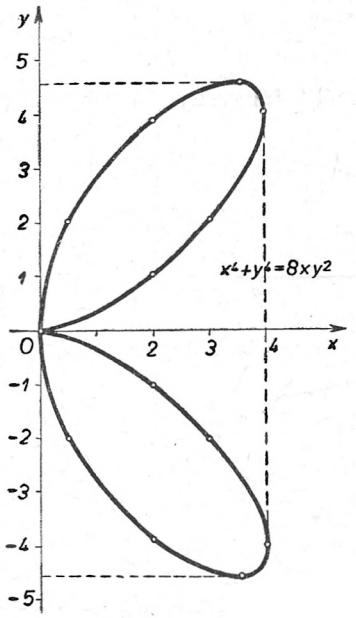
Négyértékű (az $x = 0$ helyen a négy érték összeesik); y legmagasabb hatványkitevője 4.

8. $$x^4 + 2y^3 = 4x^2y.$$

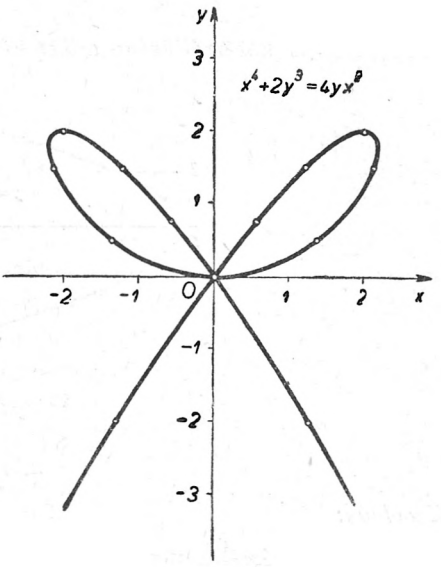
Megoldás:

Háromértékű, kivéve az $x = 0$ helyen, ahol a három érték összeesik. y legnagyobb kitevője: 3. (L. a 25. ábrát!)

$$x^4 - y^4 = x^2 - 2y^2.$$



24. ábra



25. ábra

Megoldás:

Átírjuk olyan alakba, amelyből y egyenletmegoldással kifejezhető:

$$y^4 - 2y^2 + (x^2 - x^4) = 0.$$

x értékét adottnak, az y változót pedig ismeretlennek tekintve, tudjuk a kifejezést y-ra megoldani, azaz a függvényt explicit kifejezni. Az egyenlet y-ban negyedfokú, de másodfokúra redukálható. A redukált másodfokú egyenletnek

két pozitív — tehát az eredeti egyenletnek négy valós — gyöke van, ha az «állandó tag»: $x^2 - x^4$ pozitív, de 1-nél kisebb;

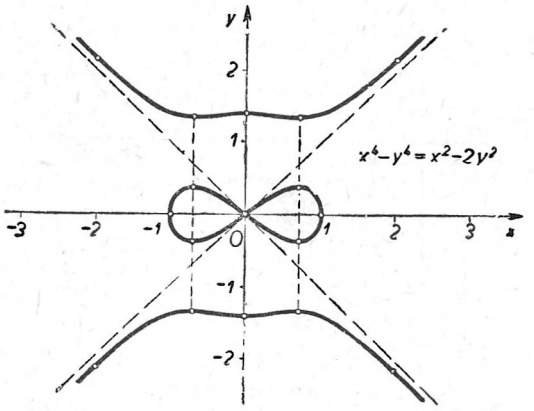
egy pozitív — tehát az eredeti egyenletnek két valós — gyöke, ha $x^2 - x^4$ negatív, vagy $+1$-gyel egyenlő;

egy valós gyöke sincs, ha $x^2 - x^4 > 1$;

és végül speciálisan egy pozitív és egy 0 értékű — és az eredeti egyenletnek három különböző — gyöke van, ha $x^2 - x^4 = 0$.

Az $x^2 - x^4$ parabolát ábrázolva, vagy akár a $0 < x^2 - x^4 < 1$ egyenlőtlenséget megoldva láthatjuk, hogy az első eset a $0 < x < 1$ nyílt intervallumban, a második a $-\infty < x < -1$ és az $1 < x < \infty$ intervallumokban, a harmadik sehol, a negyedik pedig az $x_1 = 0$ és $x_{2,3} = \pm 1$ helyeken következik be.

Így a függvény kétértékű a $-\infty < x < -1$ és $1 < x < \infty$ szakaszon, háromértékű az $x_1 = 1$ és az $x_2 = -1$ helyeken,[1] négyértékű a $-1 < x < 1$ szakaszon.



26. ábra

2. § d)

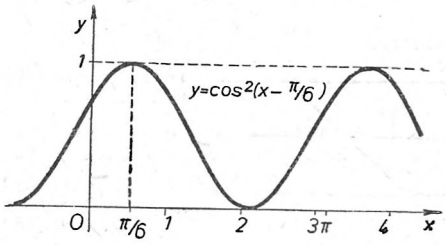
Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, és állapítsuk meg p periódusuk nagyságát:

1. $$y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

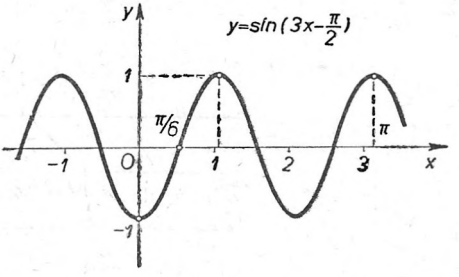
Megoldás: (L. a 27. ábrát.)

2. $$y = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Megoldás: (L. a 28. ábrát.)



27. ábra



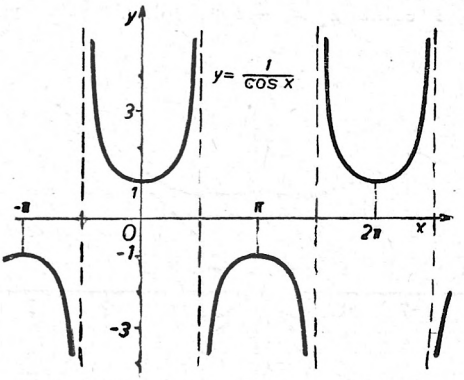
28. ábra

3. $$y = \operatorname{tg} 3x.$$

4. $$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

[1] Az $x_1 = 0$ helyen tulajdonképp ún. duplapontja van a görbének (lásd az ábrát), amit kétszeresen számítva, itt is négyértékűnek tekinthető a függvény!

Megoldás:



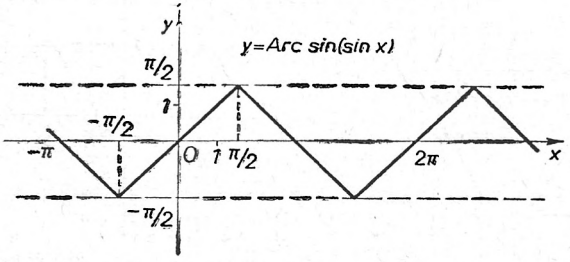
29. ábra

5. $y = \text{Arc sin } (\sin x)$.

Megoldás:

Itt különböző szögek sinusaihoz — az arcus főértékeire szorítkozva — az y változó $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közé eső értékeit rendeljük.

Hogy az ábra helyes, néhány értékpár felvételével könnyen belátjuk. Legyen pl. $x = \pi + \xi$, ahol $-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$. Tekintettel arra, hogy $\sin(\pi + \xi) = -\sin \xi$, viszont $\text{Arc sin } (-\sin \xi) = -\text{Arc sin } (\sin \xi)$ (mert a főérték feltétlenül $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között van, következik, hogy) $y(\pi + \xi) = -\xi$. (Részleteket l. 8. §-ban!)



30. ábra

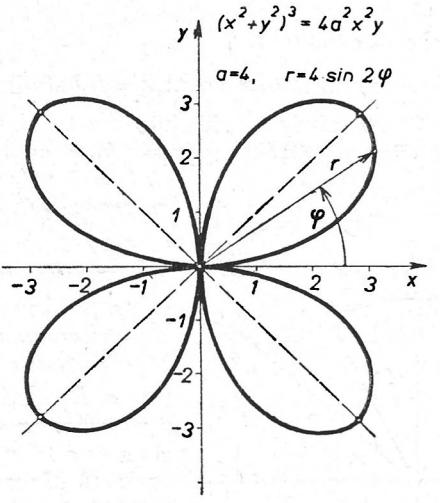
6. $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$.

7. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Megoldás:

Helyettesítsünk be polárkoordinátákat: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$. Így az eredeti kapcsolatból egy r és φ közötti kapcsolat adódik: $r^6 = 4a^2r^4\cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi$, vagy r^4-nel egyszerűsítve és összevonva: $r^2 = a^2\sin^2 2\varphi$, tehát $r = \pm a\sin 2\varphi$. Mivel *csak pozitív r-nek van értelme*, azért megállapodunk abban, hogy negatív színusz-értékeknél a negatív előjel legyen érvényes! Láthatjuk, hogy a középpontból húzott sugár (rádiusz) hossza a középponti szög függvényében periodikusan változik. Mennyi a periódus szögének nagysága?

(E feladattal kapcsolatosan megjegyezzük, hogy a függvény gyakran az y-változóban nem mutat periodicitást, de egy új változóban, pl. a rádiuszban már igen. Ha pl. a görbe zárt görbe (ilyen a fenti is!), akkor a rádiuszban mindig periodikus. A periódus ilyenkor bizonyos polárszög-intervallum, pl. π. Polárkoordinátákról l. részletesen a 3. §-ban.)



31. ábra

2. § e)

A gyakorlat szempontjából igen fontos, hogy fel tudjuk ismerni *a függvény szakadási pontjait*. Ezért a következőkben néhány jellegzetes példát mutatunk be erre.

Állapítsuk meg a túloldali függvények x_0 szakadási helyeit és vizsgáljuk meg, található-e olyan alkalmas $f(x_0)$ választás, amellyel a folytonosság helyreáll.

1. $$y = \frac{1}{x}.$$

Megoldás:

Az $x \to 0$ esetén $y = \frac{1}{x}$ minden határon túl nő vagy csökken, aszerint, hogy x pozitív vagy negatív értékeken át közeledik-e a 0-hoz. Mivel pedig az $x_0 = 0$ helynek elég kis környezetében a függvényértékek különbségei között találunk pl. 1-nél (sőt 10-nél, 100-nál stb.) nagyobbat, bizonyosan nem található egyetlen olyan $f(x_0)$ érték sem, amellyel a folytonosság helyre lenne állítható. Lásd egyébként a 12. ábrát!

2. $$y = \operatorname{tg} x.$$

Megoldás:

Szakadási pontok:

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}. \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

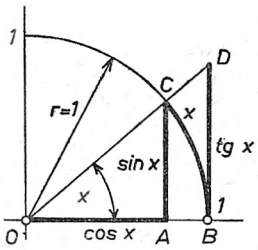
Az ábrából azonnal látjuk, hogy ezen pontok közelében a függvényértékek különbségei is tetszőlegesen nagyok, így a folytonosság nem állítható helyre!

3. $$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Megoldás:

a) Szakadási pont: $x = 0$ hely.

Ezen hely elég kis környezetében — amiről a táblázat meggyőz bennünket — a függvényértékek egymástól és az 1 értékről előírtan kevéssé különböznek. Az $f(x_0) = 1$ választással tehát a folytonosságot valószínűleg helyre tudjuk állítani.



32. ábra

b) A 32. ábrán feltüntettük az x, $\sin x$ ($\cos x$ és $\operatorname{tg} x$) ismert értelmezését az egységkörben. Ebből nyilvánvaló, hogy a $(\sin x)/x$ hányados felfogható akár az $\overline{AC}$ félhúr és $\widehat{BC}$ félív hosszviszonyaként, akár pedig az OBC háromszög és az OBC körcikk területviszonyaként. Ha a körív mentén a C pont tart a B ponthoz ($C \to B$), így a közbeeső $\widehat{BC}$ ív x hossza a zérushoz ($x \to 0$), akkor — a szemlélet szerint — a félhúr $\sin x$ és a félív x hossza mind közelebb esik egymáshoz, az említett háromszög $(\sin x)/2$ és körcikk $x/2$ területe úgyszintén, tehát a $(\sin x)/x$ hosszviszony, ill. területviszony mindinkább közelít az 1-hez [$(\sin x)/x \to 1$]. E szemlélet alapján nyert eredményt a következő pontban igényesebb levezetéssel is alátámasztjuk.

* *c)* Vizsgáljuk meg e célból, hogy a $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right|$ különbség valóban tetszőlegesen kicsinnyé válik-e, ha az x elég közel van a 0-hoz.

Ezt kell valahogyan nagyságrendileg megbecsülnünk!

A 32. ábrából, amely az egységsugarú körből x szög alatt kimetszett körcikket ábrázolja, az OAC $\triangle$, az OBC körcikk és az OBD $\triangle$ területének összehasonlításával a túloldalon levő egyenlőtlenség olvasható le.

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \text{ ha } \frac{\pi}{2} > x > 0;$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} > \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \text{ ha } -\frac{\pi}{2} < x < 0.$$

Az egyenlőtlenséget $\frac{\sin x}{2}$-vel osztva, majd a reciprokát véve [itt figyelembe kell vennünk, hogy ha $\sin x$ negatív – azaz ha x negatív (ti. csak kis abszolút értékű, 0-hoz közel levő x-ek érdekelnek bennünket) – akkor az osztásnál megváltozik az egyenlőtlenségek iránya]:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad (x \lesseqgtr 0) \quad \text{(páros függvények)}.$$

Kivonva 1-et:

$$\cos x - 1 < \frac{\sin x}{x} - 1 < \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

Ellenkező előjelet véve, viszont:

$$1-\cos x > 1-\frac{\sin x}{x} > 1-\frac{1}{\cos x}.$$

A két egyenlőtlenségből könnyen kiolvashatjuk, hogy $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|$ nem nagyobb, mint $|1-\cos x|$ és $\left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right|$ közül a nagyobbik. (Ami bizonyosan az utóbbi amely előbbiből egynél kisebb értékkel: $|\cos x|$-szel való osztással jön létre.) Vagyis:

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right|.$$

Mivel $|\cos x| > \frac{1}{2}$, ha x már elég kicsi, $|1-\cos x|$ pedig – amit az $ABC \triangle \overline{AB}$ befogója interpretál, amely kisebb az átfogónál, az viszont kisebb az x hosszúságú ívnél — bizonyosan kisebb $|x|$-nél.

Így

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \left|\frac{1-\cos x}{\cos x}\right| < \frac{|x|}{\frac{1}{2}} = 2\cdot|x|$$

(ha $|x|$ már elég kicsi, pl. $\frac{\pi}{6}$-nál kisebb).

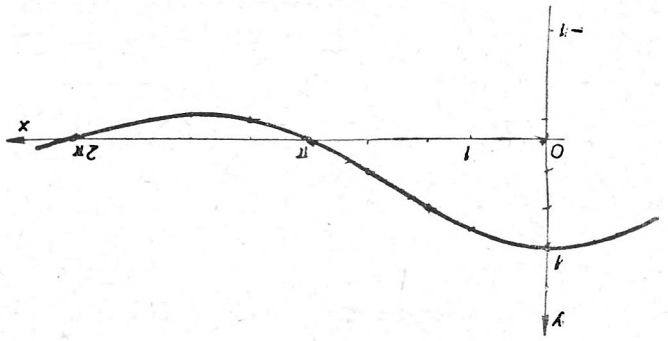
Ennek következtében — bármilyen kicsiny számot jelent is ε —

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right| < \varepsilon, \text{ hacsak } |x-0| = |x| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Az

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény tehát mindenütt folytonos. (Grafikont l. a 33. ábrán).



33. ábra

4. $y = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$; ha $x \neq 0$; és $y = \frac{1}{2}$, ha $x = 0$

(ez megállapodás!)

Megoldás: A függvénynek az $x = 0$ helyen szakadása van.

Ugyanis $\frac{1}{x}$ minden határon túl nő vagy csökken, amint x a zérushoz tart — aszerint, hogy x a pozitív vagy a negatív számokon át tart a zérushoz (jelekben: $x \to +0$; ill. $x \to -0$).

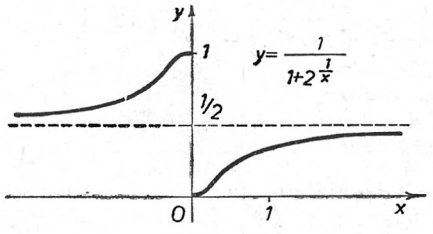
2-nek minden határon túl növekvő kitevőjű hatványai maguk is minden határon túl nőnek, minden határon túl csökkenő kitevőjű hatványai pedig a 0-hoz tartanak (t.i. $2^{-a} = \frac{1}{2^a}$).

Eszerint tehát:

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +0} \frac{2^{-\frac{1}{x}}}{2^{-\frac{1}{x}}+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \neq \frac{1}{2} = y(0);$$

$$\lim_{x \to +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq \frac{1}{2} = y(0).$$

A függvénynek tehát nincs az $x = 0$ helyen határértéke (más ti. a határérték ha «jobbról» és más, ha «balról» közelítünk az $x = 0$ helyhez), így a függvény nem lehet itt folytonos.



34. ábra

5. $y \begin{cases} = x, \text{ ha } x \text{ racionális,} \\ = 0, \text{ ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$

Megoldás:

Az így definiált függvény minden x-re értelmezve van, de sehol sem folytonos (az $x = 0$ helyet kivéve).

6. $y = \operatorname{ctg} x$.

7. $y = \frac{1}{\sin x}$.

8. $y = \frac{5}{(x-2)^2}$.

9. $y = x + \frac{2x}{x^2-1}$.

10. $y = \frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$.

11. $y = \ln x$.

12. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

13. $y = \frac{x}{2-x^2}$.

14. $y = x$, ha $-\pi < x < \pi$, egyébként 2π periódusú a függvény.

15. $y = 10^{\frac{1}{x}}$.

3. §. A VÁLTOZÓK TRANSZFORMÁCIÓJA

Ha az $y = f(x)$ függvénykapcsolatban az x változót valamely másik x' változó függvényének tekintjük. s az x helyébe, az x' és x összefüggését megszabó kapcsolat segítségével, az x' új független változó megfelelő kifejezését írjuk be, ezzel egy új $y = \varphi(x')$ függvényhez jutunk. Ennek a függvénynek természetesen változatlan koordinátarendszerben az eredetitől eltérő grafikonja lesz.

Az eredeti grafikont is tekinthetjük az új függvény görbéjének, csakhogy ekkor — nyilvánvalóan — az abszcisszatengely beosztását kell megváltoztatni úgy, ahogy azt az eredeti x és az új x' változók kapcsolata megszabja. Természetesen ugyanilyen eljárással a másik változó: y helyébe is új y' változót hozhatunk be.

Ilyen új változó bevezetését az illető *változó transzformációjának nevezzük.* A függvény képletében elvégzett transzformációval a *grafikon transzformációja is együttjár.* Ezt azonban, mint mondottuk már, kétféleképp hajthatjuk végre. Az első módszert görbetranszformációnak vagy alakzattranszformációnak, a másodikat koordinátatranszformációnak nevezzük.

Ebben a fejezetben csak a legegyszerűbb, az ún. *lineáris transzformációval* foglalkozunk; helyesebben ennek is csupán azzal az esetével, amikor az x' az x-nek, az y' pedig az y-nak lineáris (elsőrendű) függvénye. (x' ugyanis lehetne x és y lineáris függvénye is. Ez utóbbi esettel itt nem foglalkozunk!) Ezt magát is két speciális esetéből, az eltolásból és nyújtásból fogjuk származtatni.

a) Lineáris transzformáció

α) **Eltolás.** Az $y = f(x)$ függvénykapcsolatban az $x = x' - \xi$ kapcsolattal új változót vezetünk be.

Példák:

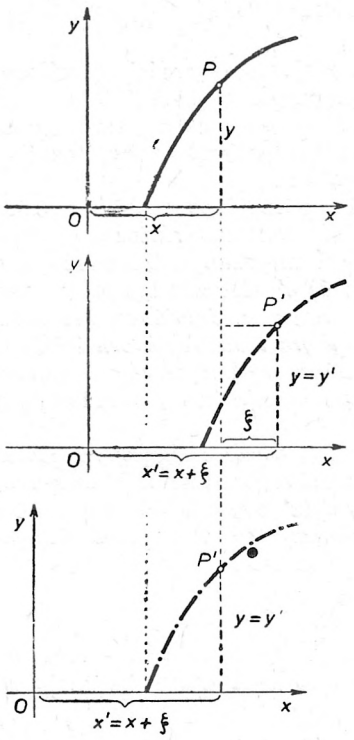
1. Milyen változást jelent ez a grafikonra, ha ott görbetranszformációt hajtunk végre? Ábrázoljuk a változást!

Megoldás:

1. Az $y = f(x)$ függvénykapcsolat a független változó adott x értékéhez az $y_1 = f(x)$ értékét rendeli hozzá, a transzformáció elvégzése után éppen úgy, mint előtte. A transzformáció elvégzése után azonban az f függvény argumentuma $x' - \xi$; az $x' - \xi$ értékének kell tehát az adott x-szel egyenlőnek lennie ahhoz, hogy az $y_1 = f(x)$ függvényértéket kapjuk; most ugyanis az $y = f(x' - \xi)$ függvényről van szó. Ha pedig $x' - \xi = x$, akkor $x' = x + \xi$.

2. Tekintettel arra, hogy a koordinátarendszer beosztása görbetranszformáció esetén változatlan marad, az előbbiekből az következik, hogy azt az $f(x)$ távolságot, amelyet az eredeti grafikonban az adott x helyen kellett felmérni, most az $x' = x + \xi$ helyen kell felmérni. Tehát minden ordinátát s vele együtt *az egész görbét ξ egységgel kell eltolni.*

2. Milyen változást jelent az előző transzformáció, ha azt koordinátatranszformációnak tekintjük? Vizsgáljuk meg, ugyanazt az eredményt kapjuk-e utóbbi esetben is, mint alakzattranszformációnál.



35. ábra

Megoldás:

1. Okoskodásunk első része teljesen megegyezik az előző példával.

2. Tekintettel arra, hogy a grafikon változatlan helyzetben marad *koordinátatranszformáció esetén*, az előbbiekből következik, hogy azon a helyen, ahol az $f(x)$ értéket felmértem, s amelyre az $x = x$ érték volt eredetileg bejelölve, most az $x' = \xi + x$ értéket kell beírnom; hasonlóan, ahol az előbb az $x = 0$ hely volt, most az $x' = 0 + \xi = \xi$ érték lesz bejelölve. Lényegében tehát az *abszcisszatengelyt, beosztásával együtt* — ξ *egységgel toljuk el.* (Lásd a 35. sz. ábrát!)

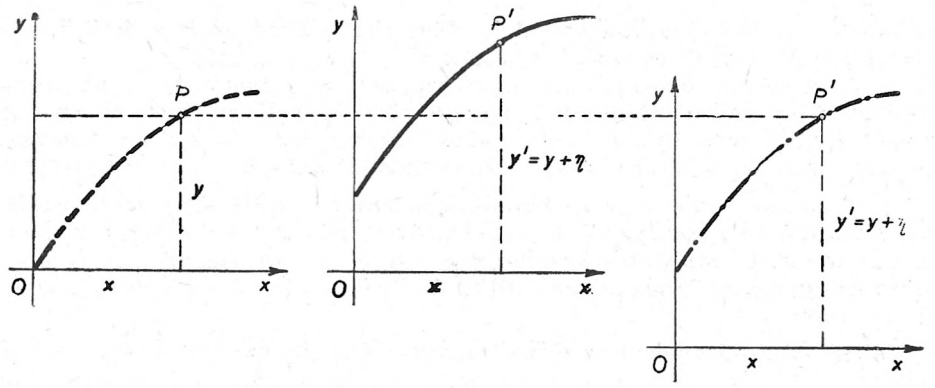
3. *A két transzformáció nyilvánvalóan ugyanazt az eredményt szolgáltatja viszonylagosan.* Hiszen a görbe és a hozzátartozó koordinátarendszer egymáshoz képesti helyzete szempontjából egyre megy, akár a görbét jobbra, akár a koordinátarendszert balra toljuk el, ill. viszont.

3. Fogalmazzuk meg és ábrázoljuk, mit jelent az $y = y' - \eta$ transzformáció, ha azt a görbetranszformációként hajtjuk végre.

4. Mit jelent az előző transzformáció, ha azt koordinátatranszformációként kezeljük.

Megoldás: (L. a 36. ábrán!)

β) **Nyújtás.** Vezessük be az $y = f(x)$ függvényben az $x = \frac{x'}{p}$ összefüggés segítségével az x' új változót.



36. ábra

5. Mit jelent a transzformáció, ha azt *görbetranszformációnak* tekintjük. Szemléltessük ezt ábrában.

Megoldás:

1. Okoskodásunk ugyanúgy kezdődik, mint 3. § 1.-ben. Így kell azután folytatnunk: a transzformáció elvégzése után azonban az $\frac{x}{p}$-nek kell x-szel egyenlőnek lennie, hogy az $y = f(x)$ függvényértékre jussunk; most ugyanis az $y = f\left(\frac{x'}{p}\right)$ függvényről van szó. Ha pedig $\frac{x'}{p} = x$, akkor $x' = p \cdot x$.

2. Tekintettel arra, hogy a koordinátarendszer most változatlan beosztású, az $f(x)$ függvényértéket most az adott x-hely helyett az xp helyen kell felmérnünk. Minden más ordináta helyét ugyanígy az y-tengelytől mért eredeti távolsága helyett p-szer akkora távolságra kell felmérnünk. *A görbe-transzformáció jelentése ezek szerint: a görbét az abszcisszatengely irányában* p-szeresére nyújtjuk (ha $p < 1$, akkor ez természetesen zsugorítást jelent). (L. a 37. ábrát.)

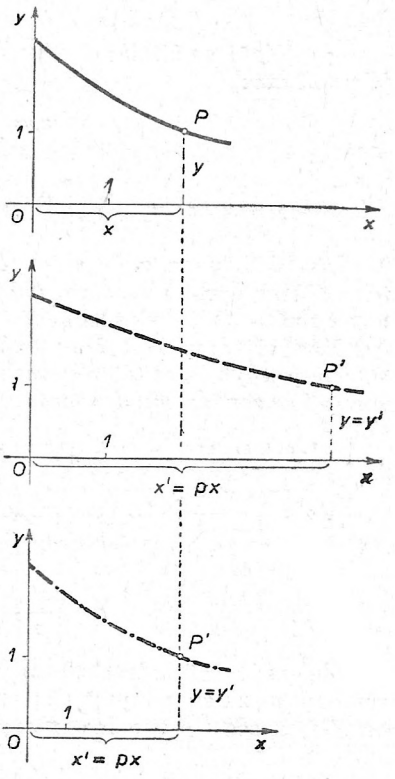
* 3. *A két transzformáció relatíve most is ugyanazt az eredményt szolgáltatja.* Egyik esetben ugyanis a görbét nyújtjuk az abszcisszatengelyhez képest, a másik módszernél pedig a tengelyt zsugorítjuk a görbéhez képest. (A különbség csak annyi, hogy ugyanaz az ábra és a koordinátarendszer koordinátatranszformáció esetén kicsinyítve, alakzattranszformáció esetén nagyítva szerepel. Mindkettő eltér az eredeti $y = f(x)$ grafikontól, mert ahhoz képest vagy csak a görbe, vagy csak a tengelybeosztás változik. (Lásd 37. sz. ábrát!)*

6. Mit jelent az előző feladat transzformációja, ha azt *koordinátatranszformációnak* tekintjük? Mi azonos a két módszernél?

Megoldás:

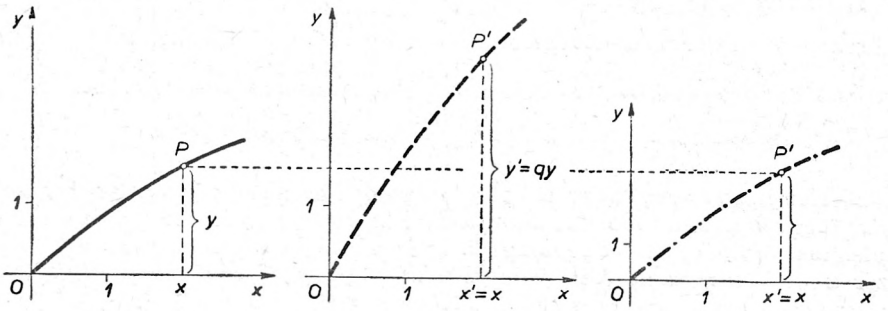
1. Okoskodásunk első része teljesen megegyezik az előző feladatéval.

2. Most a görbe marad változatlan. Arra a helyre tehát, ahol az $f(x)$ függvényértéket felmértük, most az $(x' =) xp$ értéket kell bejelölnünk. Arra a helyre, ahol eddig az $x = 1$ beosztás szerepelt, most az $(x' =) 1 \cdot p = p$ beosztás kerül. Lényegében tehát *az abszcisszatengelyt, beosztásával együtt p-ed részére zsugorítjuk* (ha $p < 1$, akkor ez természetesen nyújtást jelent). (L. a 37. ábrát.)



37. ábra

7. Ay = f(x) függvényen $y = \frac{y'}{q}$ transzformációt hajtunk végre. Mi ennek a jelentése, görbetranszformáció, ill. koordinátatranszformációként kezelve a transzformációt. Kísérjük rajzzal az okoskodást. (L. a 38. ábrát.)



38. ábra

γ) **Végül az általános eset**, amely a következő transzformációs formulákkal jellemezhető:

$$x = \frac{x'' - \xi}{p} = \frac{x''}{p} - \frac{\xi}{p}$$

$$y = \frac{y'' - \eta}{q} = \frac{y''}{q} - \frac{\eta}{q}$$

Lényegében az x és y tengely irányában történő nyújtásból és eltolásból tehető össze, görbetranszformáció esetén. Koordináta-transzformáció esetén viszont a kordináta-tengelyek mennek át hasonló változáson.

Hangsúlyozni kell, hogy az x és y tengelyek irányában történő változtatások sorrendje egymással tetszés szerinti sorrendben felcserélhető. *Az eltolás és nyújtás sorrendje* azonban *minden további nélkül nem felcserélhető.*

*Jobb szélen $y = qy$ helyesen: $y' = qy$

Az $x = \frac{x'' - \xi}{p}$ transzformáció így valósítható meg két lépésben:

Első lépés

$$x = \frac{x'}{p}, \qquad \text{illetve} \qquad x' = px$$

(Jelentése görbetranszformációt végezve: az eredeti görbét az x-tengely irányában p-szeresére nyújtjuk; koordinátatranszformáció esetén: az x-tengelyen felvett egységet — s vele együtt a beosztást — p-ed részére zsugorítjuk.)

Második lépés:

$$x' = x'' - \xi; \text{ ill. } x'' = x' + \xi.$$

(Jelentése görbetranszformáció esetén: a már nyújtott görbe ξ mértékű eltolása a pozitív x-tengelyfél irányában; koordináta-transzformációt végezve: a már zsugorított beosztású x'-tengely önmagával párhuzamos ξ-mértékű eltolása a csökkenő abszcisszák irányában.)

Az $x = \left(\frac{x'' - \xi}{p}\right) = \frac{x''}{p} - \frac{\xi}{p}$ felfogásban pedig:

Első lépés:

$$x = x' - \frac{\xi}{p}; \qquad \text{illetve} \qquad x' = x + \frac{\xi}{p}$$

(Jelentése görbetranszformáció esetén: az eredeti görbe $\frac{\xi}{p}$ mértékű eltolása a pozitív x-tengelyfél irányában; koordináta-transzformációt végezve: az x-tengely önmagával párhuzamos $\frac{\xi}{p}$ mértékű eltolása a csökkenő abszcisszák irányában.)

Második lépés:

$$x' = \frac{x''}{p}; \qquad \text{illetve} \qquad x'' = x' \cdot p$$

(Jelentése görbetranszformációt végezve: az első lépésben eltolt görbét az x-, ill. x'-tengely irányában p-szeresére nyújtjuk; koordináta-transzformációt végezve: az első lépésben eltolt tengely $x' = 0$ abszcisszájú pontját rögzítve, a felvett egységet p-edrészére zsugorítjuk, majd az így kapott egység segítségével a tengely beosztását újból szerkesztjük!)[1] Görbetranszformáció egyébként gyakrabban fordul elő. Ezzel a módszerrel vezetjük ugyanis vissza a komplikáltabb függvények grafikonját egyszerűbb függvények görbéjére.

Meg kell egyébként jegyeznünk, hogy az eddigiekben a megkülönböztető

«'» ill. «''»

jelet csak a könnyebb érthetőség kedvéért használtuk. A gyakorlatban egyszerűen pl. x helyébe $(x-2)$-t, y helyébe $\frac{y}{3}$-t stb. írunk!

[1] Abban, hogy ugyanazt a transzformációt egyszer nyújtás → eltolás, másszor eltolás → nyújtás sorrendben végezve, *a két esetben az eltolás mértékére más-más eredmény adódott*, semmiféle ellentmondás nincs! A nyújtást ugyanis mindig az origóra, mint helybenmaradó pontra vonatkoztatjuk.

Ha a nyújtást az eltolást megelőzően végezzük, akkor a nyújtást követő eltolás alatt a már nyújtott görbét kell eltolnunk. Az a pont pl., amelynek eredetileg 0 volt az abszcisszája, a nyújtás folyamán helybenmarad (l. előző mondatot), majd az eltolás folyamán az abszcisszatengellyel párhuzamosan olyan helyre kerül, ahol abszcisszája $p \cdot \xi$ értékű. Ha viszont az eltolást a nyújtást megelőzve végezzük, akkor az ezt követő nyújtás az egyes pontok eltolásának mértékét nem hagyja változatlanul. Az a pont pl., amelynek eredetileg 0 volt az abszcisszája és az eltolás folyamán ξ lett, a nyújtás következtében olyan helyre került, ahol abszcisszája $p \cdot \xi$ értékű. Látható tehát hogy a végeredmény mindkét sorrend esetében ugyanaz, jóllehet első esetben $p \cdot \xi$, a másodikban, ξ mértékű eltolást végeztünk.

Speciális esetek:

$q > 1$: q arányú nyújtás y irányban.

$0 < q < 1$: q arányú zsugorítás y irányban.

$q = -1$: tükrözés az x-tengelyen.

$q < -1$: tükrözés az x-tengelyen és q arányú nyújtás y irányban.

$p = q$ egyenlő: $p = q$ arányú nyújtás (zsugorítás) esetleg még tükrözés, mindkét tengely irányában (ez az ún. p-arányú hasonlósági transzformáció).

$p = -1$: tükrözés az y tengelyen.

$p = -1$: $q = -1$: tükrözés az y, majd az x-tengelyen; végeredményben az origóra vonatkozó (centrális) tükrözés stb.

b) Nemlineáris transzformációk

Közülük ebben a fejezetben csak egyet — a legfontosabbat, leggyakrabban szereplő transzformációt — ismertetünk. Az új koordinátáknak nevük is van: polárkoordináták. Szokásos jelölésük ebben a sorrendben: r, illetve φ.

A transzformációs egyenletek:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Az egyenleteket az új változókra megoldva:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Láttuk azt, hogy a tárgyalt — speciális — lineáris transzformációk esetén lényegbevágó különbség a görbetranszformáció — koordináta-transzformáció között nem volt. Nemlineáris transzformációk esetén viszont óriási különbség van a két felfogás között.

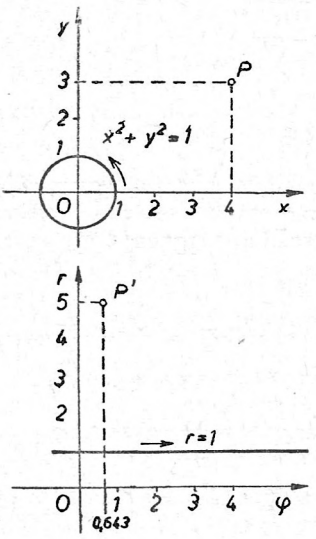
A döntő különbség már a változók geometriai értelmezésénél is jelentkezik.

a)* **Görbetranszformáció. Ha ugyanis a görbetranszformáció-felfogás alapján értelmezzük az átalakítást, akkor a régi és az új tengelyek, a régi és az új koordinátarendszer geometriailag ugyanaz. Szokásos az eredeti y-tengelyt tekinteni r-tengelynek, az eredeti x-tengelyt pedig φ-tengelynek, változatlan beosztással.

Ebben a felfogásban tehát pl. az $r =$ const. egyenletű görbe a φ-tengellyel párhuzamos egyenes, az $r = \varphi$ görbe a tengelyek szögét az I. negyedben felező egyenes stb.

Az alakzatok viszont ebben a felfogásban teljesen megváltoznak; a pontok valamennyien helyüket változtatják, az x-tengelyen levő pontokat kivéve. Pl. az $x = 4$, $y = 3$ koordinátákkal adott pont az $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} \cong 0{,}643$; $0{,}643 \pm$

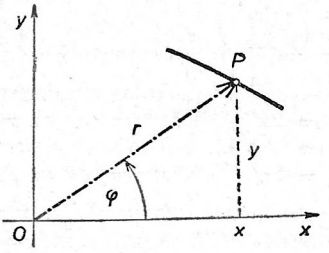
kx helyre kerül. (Lásd 39. ábrát.) Vagy pl. az $\sqrt{y^2+x^2} = 1$ egyenletű kört a transzformáció az $r = 1$ egyenletű, a φ tengellyel párhuzamos egyenesbe viszi át stb.[1]



39. ábra

β) **Koordináta-transzformáció.** Ha viszont koordináta-transzformáció felfogásban tekintjük az átalakítást, akkor az alakzatok, görbék, pontok változatlan helyzetben maradnak, de megváltozik a koordináták jelentése.

A 40. ábráról azonnal belátjuk, hogy $r = \sqrt{x^2+y^2}$ az x, y koordinátájú pont origóról mért távolságát jelenti,



40. ábra

$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ pedig az origóból a pontba húzott egyenes irányszögét $\left(\text{ti. } \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\right)$.

Ebben a felfogásban tehát pl. az $r = \text{const.}$ egyenletű görbe az origóval mint középponttal rendelkező kört, az $r = \varphi$ egyenletű görbe pedig az ún. archimedesi spirálist; stb. jelenti.

A gyakorlatban a polárkoordinátákat mindig az utóbbi felfogásban használjuk. Geometriai alag definiált görbék egyenletét pl. gyakran könnyebb célszerűbb polárkoordinátákat használva felírni. Gyakorlatilag talán ennek van legnagyobb jelentősége. Ilyen esetekben természetesen koordináta-transzformáció-felfogásban dolgozunk, hiszen a görbe adott, azon nem akarunk változtatni, ha egyik koordinátarendszerről a másikra térünk át.

További feladatok: 3. § a)-hoz:

8. Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{3}(4x^2 - 16x + 5)$ parabolát.

Megoldás:

1. Az $y = x^2$ parabola felrajzolásában elég nagy a jártasságunk. Ebből akarjuk az adott egyenletű görbét származtatni. Ehhez elsősorban is a $4x^2 - 16x + 5$-öt

[1] Meg kell jegyeznünk, hogy ha a transzformációt koordináta-transzformációnak tekintjük, de (pl. tévedésből) görbetranszformációt végzünk, akkor tulajdonképpen az euklideszi geometriáról egy speciális nem-euklideszi geometriára tértünk át.

ilyen alakra kell átrendeznünk: $(ax+b)^2+d$. Innét kiolvasható az eltolás és nyújtás mértéke

$$4x^2-16x+16 = (2x-4)^2$$
$$4x^2-16x+5 = (2x-4)^2-11$$

Azaz a függvény ilyen alakban írható:

$$3y+11 = (2x-4)^2$$

Tekintettel arra, hogy ezt görbetranszformációval akarjuk egyszerűbb függvény grafikonjából származtatni és görbetranszformáció esetén a szereplő x, y; x', y'; x'', y'' stb. koordinátarendszerek azonosak, a függvényt így is írhatjuk:

$$3y''+11 = (2x''-4)^2$$

Ez valóban származtatható az $y=x^2$ parabolából a következő módon:

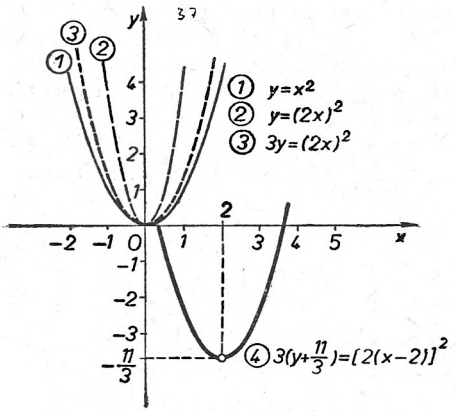
$x = x'-4$ (eltolás a pozitív x-tengely irányában 4 egységgel)
$x' = 2x''$ (zsugorítás az x-tengely irányában felére)
$y = y'+11$ (eltolás a negatív y-tengely irányában 11 egységgel)
$y'' = 3y'$ (zsugorítás az y tengely irányában harmadára).

2. Ha azonban szívesebben végzünk először zsugorítást és aztán eltolást, akkor ilyen alakra kell hoznunk a függvényt:

$$3\left(y+\frac{11}{3}\right) = [2(x-2)]^2$$

ill. az előző meggondolás alapján:

$$3\left(y''+\frac{11}{3}\right) = [2(x''-2)]^2$$



41. ábra

Ebben az esetben az átalakítás sorrendje:

$x = 2x'$ $\qquad p = \frac{1}{2}$

$x' = x''-2$ $\qquad \xi = 2$

azaz

$y = 3y'$ $\qquad q = \frac{1}{3}$

$y' = y''+\frac{11}{3}$ $\qquad \eta = -\frac{11}{3}$

Milyen lineáris transzformációval keletkeznek az $y=x^2$ függvény görbéjéből az alábbi függvények görbéi:

9. $y = x^2+1$

Megoldás: L. a 42. ábrát

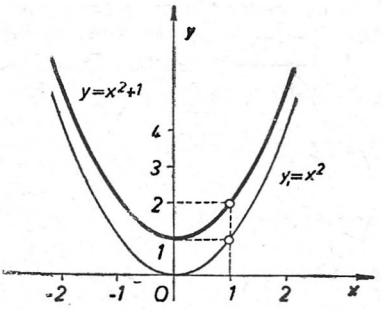
Átalakítva:

$$y-1=x^2$$

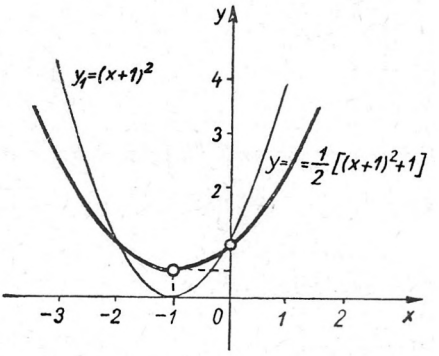
tehát az y-irányban $+1$ egységnyi eltolással.

10. $$y=\frac{1}{2}[(x+1)^2+1]$$

Megoldás: L. a 43. ábrát!



42. ábra



43. ábra

Átalakítva: $\dfrac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=(x+1)^2$; tehát x-irányban $\xi=-1$ egységnyi eltolás,

ill. y-irányban $q=\frac{1}{2}$ arányú zsugorítással s ezt követő $\eta=\frac{1}{2}$ mértékű eltolással.

11. $$y=\frac{1}{3}(x^2+1)$$

Milyen lineáris transzformációval keletkeznek az $y={}^{10}\log x$ függvény görbéjéből a következő függvények görbéi:

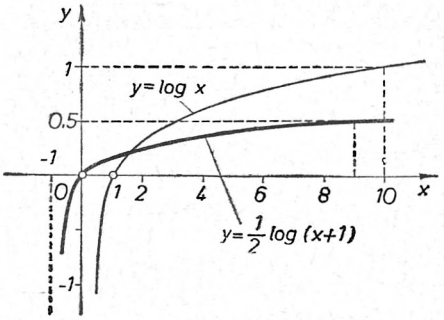
12. $$y=\frac{1}{2}\,{}^{10}\log(x+1)$$

Megoldás: L. a 44. ábrát a túloldalon!

Átalakítva:

$$2y={}^{10}\log(x+1);$$

tehát x-irányban $\xi=-1$ mértékű eltolás, y-irányban $q=\frac{1}{2}$ arányú zsugorítás-



44. ábra

13. $y = 2 \cdot \log \dfrac{x+1}{2}$

Megoldás:

Átalakítva:

$$\frac{y}{2} = \log \frac{x+1}{2}$$

tehát y-irányban $q = 2$ arányú nyújtás (– – –), x-irányban $p = 2$ arányú nyújtás (—.—.—.) és ezt követő $\xi = -1$ (———) mértékű eltolás). A logaritmustáblázat alapján a görbe már megrajzolható.

14. $y = 3 \log [2(x+4)] + 1$

Megoldás:

Átalakítva:

$$\frac{y-3}{3} = \log 2(x+4)$$

azaz x-irányban $p = \dfrac{1}{2}$ arányú zsugorítás és $\xi = -4$ mértékű eltolás, y-irányban pedig $q = 3$ arányú nyújtás és $\eta = 3$ mértékű eltolás.

Milyen lineáris transzformációval keletkeznek az $y = 2^x$ függvény görbéjéből a következő függvények görbéi:

15. $y = \dfrac{1}{3}\left[2^{\frac{x-1}{2}} + 1\right]$

Megoldás:

Átalakítva:

$$\frac{y - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{x-1}{2}}$$

tehát

$$q = \frac{1}{3}; \qquad \eta = \frac{1}{3}; \qquad p = 2; \qquad \xi = 1$$

16. $y = \dfrac{1}{12} 2^{\frac{x}{2}}$

17. $y = 2^{x-1}$

18. Hajtsuk végre az $xy = 1$ egyenlő szárú hiperbolán az

$$x = \frac{x' - 2}{3}; \qquad y = \frac{y' + 1}{4}$$

lineáris transzformációt!

Ábrázoljuk a transzformált görbét!

19. Hajtsuk végre a

$$4x^2 + 16x + 9y^2 - 18y - 11 = 0$$

egyenletű görbén az

$$x = \frac{x' - \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}; \qquad y = \frac{y' + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

lineáris transzformációt.

20. Ábrázoljuk a $3y = 9x^2 + 24x - 16$ függvényt az $y = x^2$ függvénygörbe alapján.

21. Ábrázoljuk az $5y = \cos(3x + 4)$ görbét, az $y = \cos x$ görbe alapján.

22. Tudjuk, hogy a hőmérsékletet Celsius, Réaumur vagy Fahrenheit-fokokban mérhetjük. Koordináta- vagy görbetranszformációnak kell-e tekintenünk azt a transzformációt, amelynél egyik egységről a másikra áttérünk? Adjuk meg a transzformációs egyenleteket!

23. Szögek mérőszámát radiánokban vagy fokokban adhatjuk meg. Milyen lineáris transzformációval térhetünk át egyik egységről a másikra?

24. A tömeg mérésére a fizikában a g-ot, a technikában a $\frac{g \cdot sec^2}{cm}$-t használjuk. Milyen lineáris transzformációval térhetünk át egyik egységről a másikra?

*3. § b) α)

1. Az $x = r \cdot \cos\varphi$; $y = r \cdot \sin\varphi$ alakzattranszformációt elvégezve, eredeti helyétől milyen távolságra kerül a $P(1{,}8;\ 2{,}35)$ pont?

És ugyanezt koordináta-transzformációnak tekintve?

2. Az 1. feladatban adott alakzattranszformációt elvégezve, milyen görbébe megy át az $y = 2x$ egyenletű egyenes?

3. Milyen görbébe megy át az $y = 2x - 3$ egyenletű egyenes?

4. Mibe megy át az $y = 2x$ egyenletű egyenessel párhuzamos egyenesek serege?[1]

5. Mely görbéket visz át az előbbi transzformáció 2 iránytangensű egyenesekbe?

6. Mely görbéket visz át az előző transzformáció az r-tengelyt érintő, középpontjával a φ-tengelyen levő körökbe?

(Azaz átfogalmazva: a nem-euklideszi síkból mely görbék látszanak r-tengelyt az origóban érintő köröknek?)

Megoldás: Legyen a kör középpontja a φ-tengely a «abszcisszájú» pontjában. Akkor a kör egyenlete:

$$r^2 + (\varphi - a)^2 = a^2 \ ; \qquad \text{ill. rendezve:}$$
$$r^2 + \varphi^2 - 2\varphi a = 0$$

[1] A kérdést így is fel lehetne tenni:

Az $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$ transzformáció által meghatározott nem-euklideszi síkból nézve, minek látszik a 2 iránytangensű egyenesek serege?

A helyettesítést elvégezve:

$$x^2+y^2+\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}-2a\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=0$$

A kérdéses görbék implicit egyenlete tehát:

$$x^2+y^2+\operatorname{arc\,tg}^2\frac{y}{x}-2a\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}=0$$

7. Melyik görbét viszi át a transzformáció az $r^2-\varphi^2=1$ egyenletű hiperbolába?*

3. §. b) β)

1. Határozzuk meg az $y=5$ egyenletű egyenes polárkoordinátás egyenletét, a transzformációs egyenletek felhasználása nélkül! Ellenőrizzük a kapott eredményt a transzformációs egyenletek segítségével!

Megoldás: Az adott «görbe» egyenletét a szokásos módon határozzuk meg: felvesszük a görbe tetszés szerinti F futó pontját, bejelöljük a pont koordinátáit (koordináta-transzformációs felfogásban!): r és φ. Ezek között kell a geometriai összefüggésekből következő kapcsolatot meghatároznı.

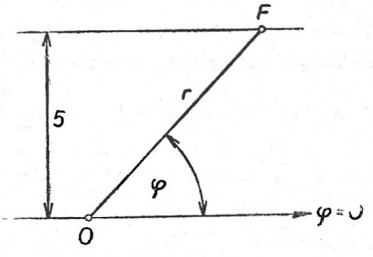
A geometriai összefüggések: az egyenes 5 egységnyi távolságban van az origótól, azaz $\overline{OA}=5$; továbbá $OAF\sphericalangle=\frac{\pi}{2}$; $OFA\sphericalangle=\varphi$ (váltószögek!) (L. a 45. ábrát!)

Ebből azonnal következik, hogy

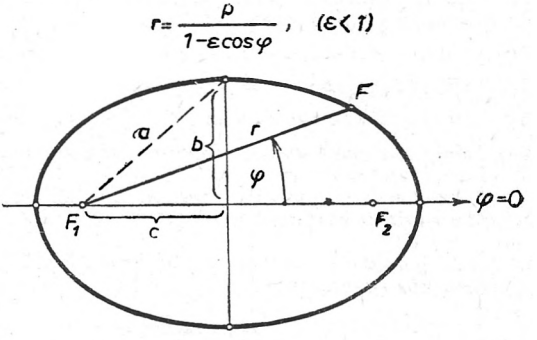
$$\overline{OA}=\overline{OF}\cdot\sin\varphi;\text{ azaz}$$

$$5=r\cdot\sin\varphi;\qquad r=\frac{5}{\sin\varphi}.$$

Ugyanezt az eredmény kapjuk természetesen akkor is, ha az $y=r\cdot\sin\varphi$ transzformációs egyenletet használjuk fel!



45. ábra



46. ábra

2. Határozzuk meg a $2c$ fókusztávolságú, $2a$ nagytengelyű ellipszis polárkoordinátás egyenletét, ha a nagytengelyt választjuk tengelynek és az origót az F_1 fókuszba helyezzük!

Megoldás: Első lépésként ismét az F futó pontot felvéve, bejelöljük koordinátáit. Az ellipszis geometria definíciója szerint (L. a 46. ábrát!)

$$\overline{F_1F} + \overline{FF_2} = 2a$$

De
$$\overline{F_1F} = r,$$

és
$$\overline{FF_2} = \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cdot \cos\varphi}$$

(a cosinus-tétel szerint!)

Ezzel azonban a keresett összefüggést már meg is találtuk:

$$r + \sqrt{r^2 + 4c^2 - 4rc \cdot \cos\varphi} = 2a$$

Rendezve, négyzetre emelve, majd ismét rendezve és r-et (ezt szoktuk általában «függő változónak» tekinteni) kiemelve:

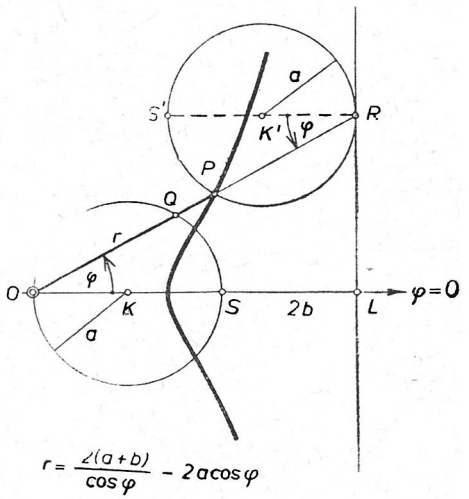
$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cdot \cos\varphi}$$

Az ábrából azonnal leolvashatjuk hogy $a^2 - c^2 = b^2$, ahol b a fél kis tengelyhossz. A $\frac{b^2}{a}$ állandót p-vel jelöljük (ez az ún. paraméter); a $\frac{c}{a}$ állandót ε-nal (ez az ún. numerikus excentricitás).

Ezzel az ellipszis polárkoordinátás egyenlete:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi} \qquad (\varepsilon < 1)$$

3. Határozzuk meg az ún. cisszoid polárkoordinátás egyenletét. A cisszoid a következőképp származik: az L egyenesen gördül a K' középpontú, a sugarú kör. Az O pontból egyeneset húzunk a kör pillanatnyi R talp pontjába. Az egyenes kimetszi a körből a cisszoid futó pontját, P-t. A K középpontú kört a geometriai összefüggések felismerésének megkönnyítése céljából helyeztük el az ábrában.



47. ábra

Megoldás:

Bejelöljük a P futó pont koordinátáit! Hogy a koordináták közötti összefüggést megállapíthassuk, a következő két geometriai tényt kell észrevennünk:

1. $\overline{OQ} = \overline{PR}$. Ez abból a tényből következik, hogy a két kör sugara egyenlő, másrészt a $KOP\sphericalangle = QRK'\sphericalangle$, harmadrészt az $OQS\sphericalangle$ és az $RPS'\sphericalangle$ derékszögek, tehát $OQS\triangle \cong RPS'\triangle$. De két egybevágó háromszög megfelelő oldalai egyenlőek. Ezzel egyszersmind figyelembe vettük a cisszoid geometriai definícióját is.

2. $OQS\sphericalangle$ derékszög (Thales tétele). Mármost az $\overline{OP}$ így írható fel:

$$\overline{OP} = \overline{OR} - \overline{PR} = \overline{OR} - \overline{OQ}$$

De az OLR derékszögű háromszögből:

$$\overline{OR} = \frac{\overline{OL}}{\cos\varphi} = \frac{2a+2b}{\cos\varphi}$$

Az OQS derékszögű háromszögből:

$$OQ = \overline{OS} \cdot \cos\varphi = 2a \cdot \cos\varphi$$

Ezzel: $$\overline{OP} = r = 2\left[\frac{b+a}{\cos\varphi} - a \cdot \cos\varphi\right] = 2\,(a+b)\sec\varphi - 2a \cdot \cos\varphi$$

4. Határozzuk meg az $x = 3$ egyenletű egyenes polárkoordinátás egyenletét anélkül, hogy a transzformációs képletet használnók.

5. Igazoljuk, hogy a $2c$ fókusztávolságú, $2a$ nagytengelyű hiperbola paraméteres egyenlete (a 2. feladatban szereplő ellipszis elhelyezéséhez hasonlóan kitűzött origó és tengely mellett) ugyancsak

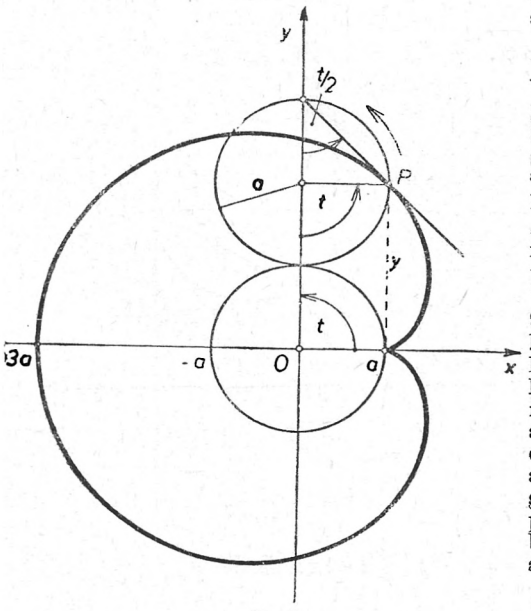
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi} \quad \text{(csakhogy most } \varepsilon > 1\text{!)}$$

6. Igazoljuk, hogy az ugyanilyen elhelyezésű parabola és kör egyenlete is

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$$

(csakhogy parabola esetén $\varepsilon = 1$, kör esetén $\varepsilon = 0$.)
(Lásd a 2. és az 5. feladatot is!)

7. Határozzuk meg a $P(R,\beta)$ ponton átmenő (R és β adottak) α irányszögű egyenes polárkoordinátás egyenletét!



48. ábra

8. A kardioid nevű görbe a következőképp származtatható:

Az R sugarú kör középpontját A-val, valamely rögzített pontját O-val jelöljük. Vegyünk fel a körön egy tetszés szerinti E pontot, és húzzunk ezen pontból érintőt a körhöz. Az O pontból szerkesszünk ezen érintőre merőlegest. A merőleges az érintőt az F pontban metszi. Ez a kardioid futó pontja.

Válasszuk O-t a koordinátarendszer kezdőpontjául, az OA egyenest tengelyül. Mi a kardioid polárkoordinátás egyenlete? Ábrázoljuk a görbét!

9. Egy a sugarú, rögzített tengelyű körhengeren egy másik, ugyancsak a sugarú körhenger gördül le, éspedig úgy, hogy a két henger tengelye — csapágyazottan — egy merev kar segítségével össze van kötve. (Ez a kar gördülés közben természetesen szintén elfordul a gördülő henger tengelyével együtt a rögzített tengely körül.) Válasszuk ki a gördülő henger palástfelületének valamelyik pontját, és igazoljuk, hogy az gördülés közben kardioidot ír le! Ábrázoljuk a görbét és a származtató szerkezetet! (48. ábra).

10. Határozzuk meg azon görbe egyenletét, amelyet a következőképp definiálunk:

a görbe azon pontok mértani helye, amelyeknek két adott ponttól, a két fókusztól mért távolságának szorzata egyenlő a két fókusz egymástól mért féltávolságának a négyzetével. (Bernoulli-féle lemniszkáta.) Origónak célszerűen a két fókusz felezőpontját válasszuk.

11. Általánosítsuk a 10. feladatban szereplő görbét a következőképp: a görbe mindazon pontok mértani helye, amelyek két adott (F_1 és F_2 fókusz) ponttól mért távolságának szorzata állandó: k^2. A két pont egymástól mért távolsága: $\overline{F_1F_2} = 2a$. Határozzuk meg a görbe (ún. Cassinian-féle görbe) egyenletét és ábrázoljuk

$$k < a$$

$$k = a \quad \text{(Bernoulli-lemniszkáta)}$$

esetekben.

$$k > a$$

12. Az a sugarú kör végiggördül az e egyenesen. Pillanatnyi talppontját (T) a fix O ponttal összekötve, az összekötő egyenes kimetszi a kör P pontját. O távolsága e-től a, azaz megegyezik a legördülő kör O-középpontjának e-től mért távolságával! Ábrázoljuk a P pontok geometriai helyét megadó görbét (ún. strophois) és határozzuk meg polárkoordinátás egyenletét, célszerűen az O pontot választva origónak, tengelynek pedig az e egyenesre merőleges egyenest.

4. §. INVERZ FÜGGVÉNYEK

A függvénykapcsolatban az x és az y változók szerepe (elvileg) felcserélhető, azaz az y-t is tekinthetjük független változónak és az x-et az y függvényének. Más szóval az $y = f(x)$ képlettel megadott függvénykapcsolatot az $x = \varphi(y)$ képlet is tökéletesen jellemzi, amely az előbbiből x-re való megoldással adódik.

Pl. az $y = 2x - 3 = f(x)$ függvényt x-re megoldva,

nyerjük:

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = \varphi(y)$$

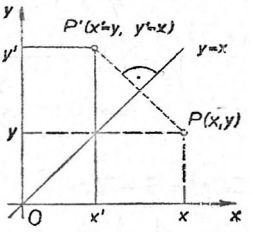
Két ilyen függvényt, mely a változók közt fennálló ugyanazon függvénykapcsolatot fejezi ki egyszer x-re, másszor pedig y-ra megoldva, egymás inverzeinek nevezzük. Mindkét kapcsolatot ugyanaz a görbe ábrázolja. Minthogy megszoktuk, hogy a független változót x-szel, a függvényt pedig y-nal jelöljük, ezért az $x = \varphi(y)$ függvénykapcsolatot az x és y változók felcserélésével $y = \varphi(x)$ alakra szoktuk hozni. Az invertálás művelete tehát jelekkel:

Első lépés: $y = f(x) \longrightarrow x = \varphi(y)$; *Második lépés:* $\longrightarrow y = \varphi(x)$

Az x-re való megoldás és a betűcsere művelete felcserélhető:

$y = f(x) \longrightarrow x = f(y)$; $\longrightarrow y = \varphi(x)$

Geometriailag a betűcserének a koordinátatengelyek felcserélése felel meg. Ennek megfelelően a koordinátarendszer $P(x, y)$ és $P'(x' = y;\ y' = x)$ pontja egyszerűen helyet



49. ábra

cserélnek, vagyis — mint ez az alábbi ábrán látható — az eredeti görbe egyes pontjai tükröződnek az $y = x$ szögfelező egyenesre vonatkozólag.

Ennek megfelelően valamely $y = f(x)$ *függvény görbéjéből az inverz* $y = \varphi(x)$ *függvény görbéjét egyszerűen az* $y = x$ *szögfelezőre való tükrözéssel nyerjük.*

Pl. $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$; $\quad x - 2 = \pm\sqrt{y+1}$

$$x = 2 \pm \sqrt{y+1} = \varphi(y)$$

betűcsere után az inverz függvény: $y = 2 \pm \sqrt{x+1} = \varphi(x)$.

Táblázattal adott függvénykapcsolat esetén az invertálás egyszerűen a táblázat két oszlopának felcserélését jelenti! Tehát az invertálás azt jelenti, hogy a tábla két oszlopát fordított irányban használjuk, vagyis visszakeresést végzünk.

Megjegyzendő, hogy amíg a táblázattal vagy görbével adott függvény invertálása a dolog természeténél fogva mindig sikerül, ugyanakkor *az inverz függvény képletének megállapítása elemi úton olykor nem lehetséges!*

Feladatok

Invertáljuk (és esetleg ábrázoljuk) az alábbi, képlettel adott függvényeket:

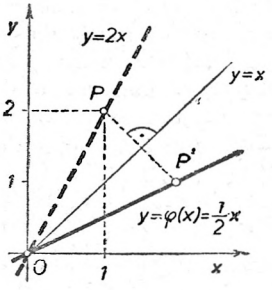
1. $y = 2x$

Megoldás:

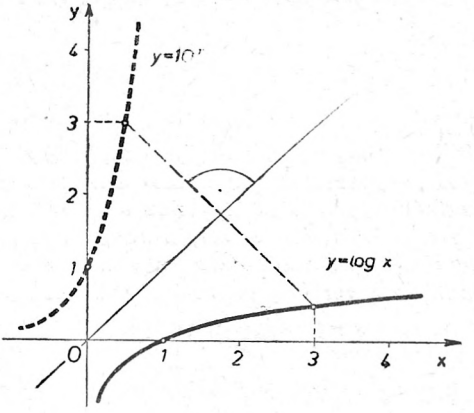
$$x = \varphi(y) = \frac{1}{2}y;$$

a betűcserét elvégezve:

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{2}x$$



50. ábra



51. ábra

2. $y = 1 - 3x$.

3. $y = x^2 + 1$.

4. $y = \dfrac{1}{1-x}$.

5. $y = 10^x$

Megoldás:

$x = {}^{10}\log y = \varphi(y)$; $y = {}^{10}\log x = \varphi(x)$. (L. az 51. ábrát.)

Invertáljuk az alábbi függvényeket:

6. $y = \sqrt{x^2+1}$ 7. $y = {}^{x}\log 2$.

8. $xy - 2x + y - 3 = 0$ 9. $y = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$

10. $y = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$.

11. Az $y = f(x)$ függvény görbéje legyen a szögfelezőre szimmetrikus. Mi következik ebből az inverz függvényre vonatkozóan?

12. Melyek az $y = f(x)$ függvény azon pontjai, amelyek inverzió alatt helyben maradnak?

13. Határozzuk meg az $y^2 - 2xy + 9y - 4x - 4 = 0$ függvény azon pontjait, amelyek az inverzió alatt helyben maradnak.

Megjegyzés. Térjünk ki még röviden az inverz függvény értelmezési tartományára, értékkészletére s ezzel kapcsolatban egyértékűségére!

Minthogy az $y' = \varphi(x')$ inverz függvény független változója (x') az $y = f(x)$ direkt függvény függő változójával (y), az inverz függője (y') pedig a direkt függetlenjével (x) azonos, ezért

az $y' = \varphi(x')$ *értelmezési tartománya* az $y = f(x)$ értékkészletével, mondjuk, a $c \leqq y \equiv x' \leqq d$ szakasszal,

az $y' = \varphi(x')$ *értékkészlete pedig* az $y = f(x)$ értelmezési tartományával, mondjuk, az $a \leqq x \equiv y' \leqq b$ szakasszal egyenlő.

Hangsúlyozzuk, hogy az $y = f(x)$ direkt függvény *egyértékűsége* önmagában korántsem biztosítja az $y' = \varphi(x')$ inverz hasonló tulajdonságát. Pl. az $y = x^2$ egyértékű direkt függvény $y' = \pm\sqrt{x'}$ inverze láthatóan kétértékű, annak következményeként, hogy a direkt minden $y \neq 0$ függvényértéket két különböző helyen ($x \neq -x$) vesz fel.

A direkt és az inverz függvény együttes egyértékűsége, vagy másként az $x \equiv y'$ és az $y \equiv x'$ változók *kölcsönösen egyértelmű függvénykapcsolata* nyilván azt jelenti, hogy minden egyes $\left.\begin{matrix} x \\ y \equiv x' \end{matrix}\right\}$-hez csak egy-egy $\left.\begin{matrix} y \\ x \equiv y' \end{matrix}\right\}$ tartozik, vagy másként, különböző x-ekhez ($x_1 \neq x_2$) különböző y-ok ($y_1 \neq y_2$) tartoznak.

Ezek alapján belátható, hogy *minden egyértékű és szigorúan monoton* $y = f(x)$ *direkt függvény* $y' = \varphi(x')$ *inverz függvénye is hasonló tulajdonságú*, vagyis $x \equiv y'$ és $y \equiv x'$ kapcsolata kölcsönösen egyértelmű és szigorúan monoton; ui. most

$$x_1 < x_2 \text{ esetén } y_1 \lesseqgtr y_2,$$

amiből már $x_1 \neq x_2$ és $y_1 \neq y_2$ is következik. Megjegyzendő, hogy a szigorú monotonitás a kölcsönös egyértelműségnek elégséges, de nem szükséges feltétele.

Számos egyértékű függvény nem az egész számegyenesen mutatkozik szigorúan monotonnak s így egyértelműen invertálhatónak, hanem csak *szakaszonként*. A direkt függvényt az ilyen szakaszokon külön-külön invertálva (geometriailag, a megfelelő görbeszakaszokat egyenként a szögfelezőn tükrözve), a nyilvánvalóan *többértékű inverz függvény egyértékű (és szigorúan monoton) ún. ágait* kapjuk.

Pl. az $y = x^2$ egyértékű függvény $0 \leqq x < +\infty$ szig. monoton növekvő szakaszának megfelel az $y' = \pm\sqrt{x'}$ kétértékű inverz függvény $y' = +\sqrt{x'}$ pozitív, egyértékű ága, $-\infty < x \leqq 0$ szig. monoton csökkenő szakaszának pedig $y' = -\sqrt{x'}$ negatív, egyértékű ága.

Pl. az $y = \sin x$ egyértékű függvény $\ldots, [-\pi/2, \pi/2], [\pi/2, 3\pi/2], [3\pi/2, 5\pi/2], \ldots$ szig. monoton szakaszainak rendre az $y = \arc\sin x'$ végtelen sok értékű inverz függvény $[-1, 1]$ közös értelmezési tartományú

$\ldots, y_1^* = \operatorname{Arc}\sin x' \equiv y', y_2^* = \pi - y', y_3^* = 2\pi + y', \ldots$ egyértékű ágai felelnek meg; itt az $y' = \operatorname{Arc}\sin x'$-et választottuk ún. *főágnak* (másként főértéknek). Ábrázoljuk ezeket az ágakat!

Végül említsük meg, hogy az $y = f(x)$ direkt függvény $x = \varphi(y)$ *inverz függvényének az inverze maga a direkt függvény*, lévén $f[\varphi(y)] = f(x) = y$.

Vizsgáljuk meg a most tárgyalt szempontokból a fenti feladatokban megadott függvényeket!

MÁSODIK RÉSZ

ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK

5. §. RACIONÁLIS EGÉSZFÜGGVÉNYEK

E függvénytípus *képlete a független változóból és állandókból az összeadás, kivonás és szorzás* (a hatványozást ismételt szorzásnak tekintjük) *végesszámú alkalmazásával épül fel.* Polinomnak (többtagúnak) is nevezik. A kijelölt műveletek és rendezések elvégzése után a következő «*normál*»-alakra hozhatjuk:

$$y = f(x) = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n x^n,$$

az itt szereplő n a polinom (véges) fokszáma. Néha

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n,$$

azaz $(x-c)$

hatványai szerint rendezett alakba írjuk át, elsősorban olyankor, ha az $x = c$ hely környezete áll vizsgálataink középpontjában. A kijelölt hatványozásokat elvégezve, majd összevonva, a normálalakra jutunk:

Pl. $P_5(x) = f(x) = \pi + 15 + 5(x-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5,$

$$P_5(x) = f(x) = (\pi + 10) + 4x + 3x^2 - 2x^3 - x^4 + x^5.$$

Másik fontos alak a *tényezőkre bontott alak:*

Pl. $$f(x) = x(x+3)\,(x-2)^2;$$

normálalakra hozva:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x.$$

A polinom gyakran *szabálytalan alakban* is jelentkezik:

Pl. $$f(x) = (x+3)^2 + 4x^2(x-2) + x - 5;$$

normálalakban:

$$f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 7x + 4.$$

a) Egytagok (monomok)

Egytagok (monomok) a legegyszerűbb polinomok. Általános alakjuk:

$$f(x) = a_n x^n.$$

Ezek közül a páros kitevőjűek

$y = x^{2n}$ alakúak; *páros* függvények, mert $f(x) = f(-x)$; görbéjük az y tengelyre szimmetrikus.

A páratlan kitevőjűek, vagyis az $y = x^{2n+1}$ alakúak viszont *páratlan* függvények, mert

$$f(x) = x^{2n+1} = -(-x)^{2n+1} = -f(-x);$$

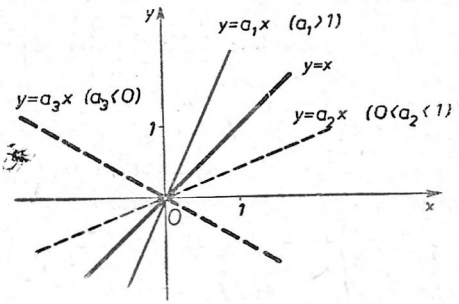
vagyis görbéjük az origóra szimmetrikus.

Az alábbiakban a többtagú racionális egész függvényeket ismertetjük részletesen.

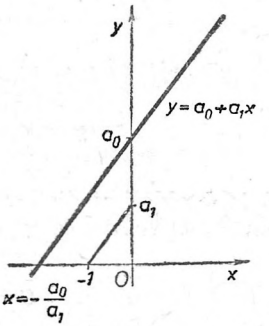
b) Elsőfokú (lineáris) függvények

α) **Az általános alak.** Általános alakjuk: $y = a_0 + a_1 x$, melyek «görbéje» az $\frac{y - a_0}{a_1} = x$ értelmében az $y = x$ szögfelező egyenesből y irányban a_1 irányú, nyújtással és azt követő a_0 mértékű eltolással keletkezik. Az $x = 0$-nál tehát $y = a_0$ $y = 0$-nál pedig $x = -\frac{a_0}{a_1}$. E két pont alapján a «görbe» megrajzolható.

Mint látjuk, a lineáris függvényt egyenes *«ábrázolja»*.



52. ábra

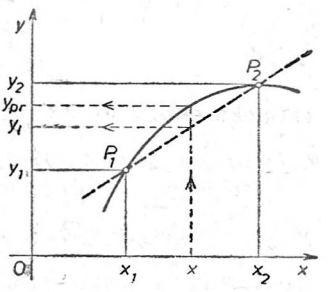


53. ábra

β) **Lineáris interpoláció.** A lineáris függvény alapvető tulajdonsága, hogy két pontjának adataiból bármely x-helyen a függvény értéke meghatározható. Az ún. lineáris interpolációnál, $x_1 < x < x_2$ esetben az $f(x_1)$ és $f(x_2)$ értékek segítségével $f(x)$-et határozzuk meg, ahol $f(x)$ lineáris függvényt jelent.

Grafikusan ez azt jelenti (l. 54. ábrát), hogy az x_1 és x_2 közé eső x-hez a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontokon átmenő egyenesen kimetsszük a P-pontot, és ehhez a keresett y értéket leolvassuk. (Itt x-et, a P-pont abszcisszáját adottnak tekintjük!)

A lineáris interpolációnak az ad különös jelentőséget, hogy (amint ez az ábrából kitűnik) *valamely*



54. ábra

$y = f(x)$ nem lineáris függvény is egy adott $[x_1, x_2]$ intervallumban gyakran jó közelítéssel lineáris függvénnyel helyettesíthető, ami *geometriailag* azt jelenti, hogy *a görbe P_1 és P_2 pontok közé eső ívdarabját egyenesdarabbal (húrjával) pótoljuk.* Ezért egyszerűsége folytán ilyen függvényeknél gyakran alkalmazunk lineáris interpolációt (pl. a logaritmuskeresésnél).

A lineáris interpolációnál felhasznált formula:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Gyakran a fordított probléma fordul elő: adott y ordinátához kell a lineárisan interpolált x abszcisszát meghatároznunk. Ekkor — az x és y szerepcseréjére való tekintettel — az interpolációs formula egyszerűen:

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1).$$

c) A másodfokú (kvadratikus) függvények

Általános alakjuk:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

melyek görbéje az $y = x^2$ görbéjéből lineáris transzformációval származtatható:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x\right) + a.$$

A jobb oldali zárójelben levő két tagot egy alkalmas tag hozzáadásával teljes négyzetté kiegészítve és ugyanezt levonva, a függvénykapcsolat az

$$y = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right)$$

alakot ölti, amelyből

$$\frac{y - \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right)}{a_2} = \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2$$

Ezek szerint y-irányban $q = a_2$ arányú nyújtással, s ezt követő $\eta = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$ mértékű eltolással, az x-irányban pedig $\xi = \frac{a_1}{2a_2}$ mértékű eltolással adódik görbénk az $y = x^2$ görbéjéből!

Megjegyezzük még, hogy $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ parabola „csúcspontja" az $x_0 = -\frac{a_1}{2a_2}$ helyen van, és felezi a két zérushely, x_1 és x_2 távolságát: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Az x_1 és x_2 meghatározásához tudni kell, hogy az $y(x_1) = y(x_2) = 0$ egyenlet jellemzi őket.

d) Harmadfokú függvények

Legegyszerűbb az $y = a_3x^3$ alakú, ennek az $x = 0$ háromszoros 0-helye. Ez $q = a_3$ arányú és y-irányú nyújtással adódik az $y = x^3$ függvényből. Mint már láttuk, az $y = x^3$ páratlan függvény, mert

$$f(x) = x^3 = -(-x^3) = -f(-x).$$

Fontos az $y = a_1x + a_3x^3$ alakú 3. fokú függvény. Ebből ugyanis lineáris transzformációval (eltolás) az általános

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

harmadfokú függvény is előállítható, illetve ez utóbbi az előbbire redukálható.

Az $$y = a_1x + a_3x^3 = x(a_1 + a_3x)^2$$

függvények 0-helyei:

$$x_1 = 0, \text{ és az } x_{2,3} = \pm\sqrt{-\frac{a_1}{a_3}}$$

helyek, feltéve, hogy $a_1 \cdot a_3 < 0$, azaz a két együttható különböző előjelű.

Pl. $$y = 4x - x^3 = x(4 - x^2) = x(2 - x)(2 + x).$$

Megjegyzés: a 3. fokú parabolánál a (környezeti) *maximum, ill. minimum helye nem a két szomszédos 0-hely számtani közepén* van (pl. fenti példában nem a $\frac{0+2}{2} = 1$ helyen, hanem $x \cong 1{,}16$-nál). Bővebbet a szélső érték vizsgálatánál.

Legáltalánosabb az $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alakú 3. fokú függvény. Feltételezzük, hogy *görbéje az* $y = bx + a_3x^3$ *függvény görbéjéből valamilyen* ξ *és* η *eltolással adódik*, azaz

$$y' = \eta + b(x' - \xi) + a_3(x' - \xi)^3 = y = a_0 + a_1x' + a_2x'^2 + a_3x'^3.$$

Itt a b nyilván az a_1, a_2, ill. a_0 együtthatóktól függő, egyelőre ismeretlen kifejezés. A kijelölt műveleteket elvégezve és rendezve (és x' helyett a szokásos x-et írva)

$$y = (\eta - b\xi - a_3\xi^2) + (b + 3a_3\xi^2)x + (-3a_3\xi)x^2 + a_3x^3.$$

A megfelelő együtthatók egyenlőségét felírva:

$$a_0 = \eta - b\xi - a_3\xi^3$$
$$a_1 = b + 3a_3\xi^2$$
$$a_2 = 3a_3\xi.$$

A legutóbbi egyenletből ξ kifejezhető:

$$\xi = -\frac{a_2}{3a_3}$$

Ezt az utolsó előttibe helyettesítve

$$b = a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3}$$

Ezt az elsőbe helyettesítve:

$$\eta = a_0 - \frac{a_1 a_2}{3a_3} + \frac{2a_2^2}{27a_3^2}$$

adódik.

e) Magasabbfokú függvények

Általános alakjuk:

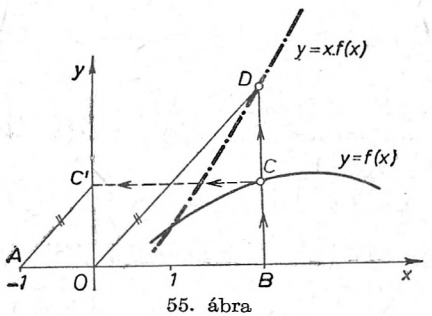
$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x \ .$$

Zérushelyeik meghatározása zárt képlettel *Abel* vizsgálatai szerint $n \geqq 5$ esetén nincs biztosítva. $n = 3$ és $n = 4$ esetén mindig lehetséges a megoldás, de igen nehézkes, s ezért a gyakorlat szívesebben folyamodik közelítő megoldásokhoz.

Feladatok

5. §. *a)*

1. A polinomok grafikonjának szerkesztése (de később, egyéb függvények görbéjének szerkesztése is) gyakran egyszerűvé válik, ha megismerkedünk azzal, *hogyan lehet az* $y = f(x)$ *függvény grafikonjának ismeretében az* $y = x \cdot f(x)$ *görbe egyes pontjait megszerkeszteni.* Jelöljük A-val ebből a célból a koordinátarendszer $(-1,0)$ pontját. Válasszunk ki egy tetszés szerinti abszcisszát, pl. az $x = b$ abszcisszát, és jelöljük a megfelelő $(b, 0)$ pontot B-vel, a $[b, f(b)]$ pontot C-vel (l. az ábrát!) Ugyanezen az abszcisszán a következő módon szerkeszthetjük meg az $x \cdot f(x)$ görbe megfelelő D pontját — azaz a $[b, b \cdot f(b)]$ pontot: Vetítsük a C pontot az ordinátatengelyre; a vetületet C'-vel jelöljük. Húzzunk ezután párhuzamosat az AC' egyenessel az origóból. Ez a párhuzamos egyenes a BC egyenest (azaz az $x = b$ egyenletű egyenest) éppen a keresett D pontban metszi.



55. ábra

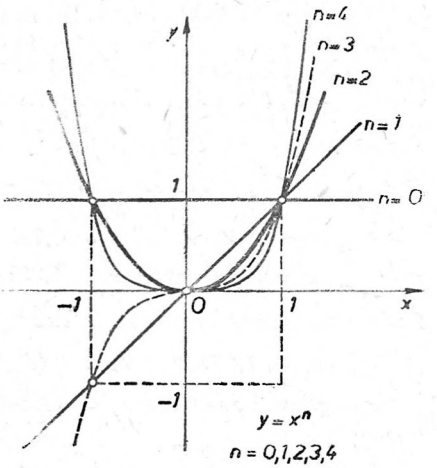
Bizonyítsuk be az AOC' háromszög és az OBD háromszög hasonlósága alapján a szerkesztés helyességét!

2. Szerkesszük meg az 1. feladat alapján az $y = x$ egyenesből kiindulva az $y = x^2$ parabola néhány pontját és kössük össze folytonos görbévé.

3. Szerkesszük meg az 1. feladatban közöltek háromszor egymás után történő alkalmazásával az $y = x$ egyenesből az $y = x^4$ parabola néhány pontját.

4. Most összehasonlítás céljából ábrázoljuk egymás mellett az $y = x^n$ alakú függvényeket a $-2 \leqq x \leqq 2$ szakaszon, amikor $0 \leqq n \leqq 4$; n egész.

Megoldás: L. az 56. ábrát!



56. ábra

5. §. b) α)

Abrázoljuk a következő lineáris függvényeket:

1. $y = 5 - 3x$.
2. $y = -2 + x$.
3. $y = 1 + \frac{x}{2}$.
4. $x + 3y = 4$.
5. $2x - y - 5 = 0$.

5. §. b) β)

1. Határozzuk meg lineáris interpolációval, $P_1(0{,}4;\ 3{,}15)$ és $P_2(0{,}5;\ -0{,}71)$ esetén, az $x = 0{,}43$ abszcisszához tartozó y ordináta értékét!

Megoldás:

$$y = 3{,}15 + \frac{-0{,}71 - 3{,}15}{0{,}5 - 0{,}4}\,(0{,}43 - 0{,}4) = 3{,}0342.$$

Határozzuk meg lineáris interpolációval y-értékét az alábbi esetekben:

2. $P_1(0{,}3;\ 2{,}12); P_2(0{,}4;\ -1{,}05)$ esetén $x = 0{,}37$ abszcisszánál.
3. $P_1(12{,}1;\ 1{,}0828); P_2(12{,}2;\ 1{,}0864)$ esetén $x = 12{,}17$ abszcisszánál.
4. $P_1(9{,}46;\ 0{,}9759); P_2(9{,}47;\ 0{,}9763)$ esetén $x = 9{,}463$ abszcisszánál.

Az *interpolációs képlet segítségével* nyilvánvalóan egyenletek közelítő **megoldása** is lehetséges.

Meg akarjuk oldani pl. az $f(x) = 0$ egyenletet. Ezt a feladatot azonban így is fogalmazhatjuk: Meghatározandók az $y = f(x)$ függvény 0-helyei, azaz azon abszcisszák, amelyekre az $f(x) = 0$ egyenlet teljesül.

Ha mármost a megoldás egy durva közelítő értékét ismerjük, válasszunk ki ennek közelében két olyan helyet, amelyekhez már ellenkező előjelű függvényértékek tartoznak. Legyen pl. x_1 és x_2 a megfelelő abszcisszák, azaz pl. $f(x_1) = y_1 > 0$; $f(x_2) = y_2 < 0$. Ekkor, tekintettel arra, hogy az (x_1, y_1) pont az x-tengely felett, az (x_2, y_2) viszont alatta van, az x_0 érték, amelyre $f(x_0) = 0$ (azaz a keresett megoldás) bizonyosan x_1 és x_2 között van. Kíséreljük meg a két pont adatai és az $y_0 = 0$ értékek alapján lineáris interpolációval meghatározni az x_0 értéket. Általában persze a megoldandó $f(x)$ egyenlet nem lineáris, így az interpolációval kapott x_3 érték a keresett x_0-nak csak közelében lesz (x_1, illetve x_2-nél közelebb), de $f(x_3) = y_3 \neq 0$. Ugyanezt az eljárást azonban az újonnan talált (x_3, y_3) ponttal, továbbá az eredetileg felvett pontok közül azzal, amely az x-tengely ellenkező oldalán fekszik, tovább folytathatjuk, egész addig, míg csak a két, a gyökhelyet közrefogó abszcisz-

sza távolsága az előírt hibahatáron belülre nem esik. [Ezt az eljárást «regula falsi» (positionis) néven is szokták említeni.]

5. Határozzuk meg az $x^3 - 5{,}08x^2 + 8{,}32x - 4{,}32 = 0$ egyenletnek azt a gyökét, amely az $x = 1$ hely közelébe esik, 10^{-3} pontossággal, lineáris interpolációval.

Megoldás:

a) $x = 1$ esetén $y = 1^3 - 5{,}08 \cdot 1^2 + 8{,}32 \cdot 1 - 4{,}32 = -0{,}08 < 0.$

$x = 0{,}9$ esetén $y = 0{,}729 - 5{,}08 \cdot 0{,}81 + 8{,}32 \cdot 0{,}9 - 4{,}32 < 0.$

$x = 1{,}1$ esetén $y = 1{,}331 - 5{,}08 \cdot 1{,}21 + 8{,}32 \cdot 1{,}1 - 4{,}32 = 0{,}0162 > 0.$

Azaz $x_2 = 1{,}1$-et kell választanunk. Lineáris interpolációval az

$$x_3 = 1{,}08316; \quad y_3 \cong 0{,}0026563; \ldots; \quad x_6 \cong 1{,}08009;$$

$$y_6 = 0{,}00001; \quad x_7 = 1{,}08000\ldots; \quad y_7 = 0{,}00002\ldots;$$

adódik.

x_3-at pl. a következő módon kapjuk:

$$x_1 = 1 \quad \text{helyen} \quad y_1 = -0{,}08.$$

$$x_2 = 1{,}1 \quad \text{helyen} \quad y_2 = 0{,}0161.$$

Keressük azon x_3 abszcisszát, amelynél a $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontokon átmenő egyenes (egyenletét $y = l(x)$-szel jelöljük) az abszcisszatengelyt metszi, vagyis amelyre $l(x_3) = 0$.

Ezt az előzőekben megadott képlettel számítva:

$$x_3 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y_3 - y_1);$$

$$x_3 = 1 + \frac{1{,}1 - 1}{0{,}0162 - (-0{,}08)}\,[0 - (-0{,}08) = 1{,}08316].$$

Ezen a helyen természetesen általában az $f(x_3)$ helyettesítési érték nem 0, [csak az $l(x_3)$] — hiszen ha $f(x_3) = 0$ lenne, megtaláltuk volna a keresett gyököt.

Jelen példánkban $f(x_3) \cong 0{,}0026563 > 0$.

Így a $P_1(x_1, y_1)$ és a $P_3(x_3, y_3)$ pontokkal tovább folytatva az eljárást ($y_1 < 0$; $y_3 > 0$) jutunk az $x_4, x_5 \ldots$ stb. közelítő gyökhelyekre, végül az $x_7 \cong 1{,}080$ értékre.

b) Ennél a lépésnél már megállhatunk. Ugyanis

$$x_6 - x_7 \cong 0{,}00009 = 9 \cdot 10^{-5} < 10^{-3}.$$

Ha tehát

$$x_0 \cong \frac{x_6 + x_7}{2} \cong 1{,}08004\text{-et}$$

választjuk közelítő gyökhelyül, az a helyes értéktől

$$\frac{x_6 - x_7}{2} = 5 \cdot 10^{-5}\text{-nél}$$

bizonyosan kevesebbel tér el.

6. Keressük meg (10^{-4}-es pontossággal) az

$$x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6 = 0$$

egyenletnek az $x = 3$ hely közelében levő gyökét.

Keressük meg az alábbi egyenletek elzett gyökét 10^{-3} pontossággal:

7. $$x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 5 = 0;$$
($x = 1$ hely közelében).

8. $$x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 51x^2 + 94x - 110 = 0;$$
($x = 5$ hely közelében)

5. §. c)

1. Milyen transzformációval keletkezik az $y = x^2$ görbéjéből az $y = 2x^2 - 8x + 6$ görbéje?

Megoldás:

$$y = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 4 - 1) = 2(x-2)^2 - 2$$

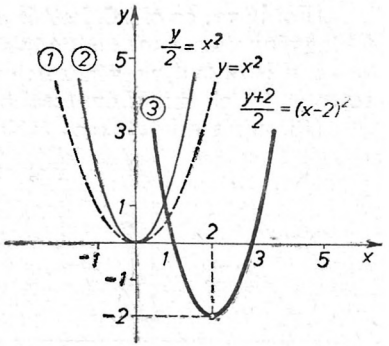
$$\frac{y+2}{2} = (x-2)^2;$$

$$q = a_2 = 2; \qquad \eta = a_0 - \frac{a_1^2}{2a_2} = -2;$$

$$\xi = -\frac{a_1}{2a} = 2.$$

Az ábra szemléletesen mutatja, hogy a transzformációval az $y = x^2$ parabola csúcspontja a $P_1(0, 0)$ helyről a $P_2(\xi, \eta)$ helyre kerül, más szóval a fenti módon kiszámítható ξ és η éppen az eltolt helyzetű parabola csúcspontjának koordinátáit jelentik!

Mivel az $y = x^2$ parabola nyújtás és eltolások után is a csúcspontján átmenő függőleges tengelyre szimmetrikus marad, azért az új csúcspont koordinátái, vagyis az ξ, η eltolások úgy is nyerhetők, hogy az $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ függvény zérushelyeinek számtani közepét, illetve ennél a függvényértéket számítjuk ki. Az $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ zérushelyei, mint az elemekből ismeretes:



57. ábra

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Így $$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a_1}{2a_2} = \xi$$

és $$y_0 = f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = a_0 - a_1\frac{a_1}{2a_2} + a_2\frac{a_1^2}{4a_2^2} = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = \eta.$$

M e g j e g y z é s : Kimutatható, hogy ez akkor is igaz, ha a függvénynek nincsenek valós zérushelyei. A komplex 0-helyeket azonban elkerülhetjük, ha a görbét az y = tengellyel párhuzamosan egy $\eta = b$ értékkel annyira eltoljuk, hogy az x-tengellyel valós metszéspontjai legyenek (vagy ami végeredményben ugyanaz, egy $y = -b$ egyenes és a parabola metszéspontjait határozzuk meg).

b) Az előbbi feladatot folytatva:

$$y = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x-1)(x-3).$$

Azaz $$x_1 = 1: \quad x_2 = 3.$$

Így $$x_0 = \frac{1+3}{2} = 2 = \xi$$

és $$y_0 = f(x_0) = f(2) = -2 = \eta$$

Megemlítendő, hogy — mivel az $y = x^2$ parabola csak pozitív függvényértékeket vehet fel — negatív a_2 nyújtási tényező esetén az $y = a_2x^2$ parabola — amely ennek következtében csak negatív értékeket vehet fel — szükségképpen «lefelé» nyílik.

2. Vizsgáljuk az

a) $y = 2x + x^2$ b) $y = 2x - x^2$.

c) $y = -2x + x^2$. d) $y = -2x - x^2$

függvényt!

Megoldás. A négy függvényt egyetlen képletbe is összefoglalhatjuk:

$$y = \pm 2x \pm x^2.$$

(Fordítva, az előző, kettős előjelekkel felírt függvényt lényegében a megadott 4 függvény összevont alakjának lehet tekinteni.) A vizsgálatot ebben az összevont alakban is el tudjuk végezni; ezzel helyet és időt takarítunk meg; viszont épp a kettős előjelek miatt óvatosabbaknak kell lennünk a műveletek végzése közben.

(Pl. hibás a következő átalakítás:

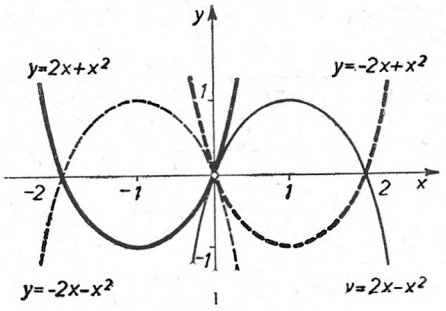
$$y = \pm 2x \pm x^2 = \pm x(2 + x).$$

mert csak az a) és d) esetet foglalja magában a legutolsó alak.)

$$y = \pm 2x \pm x^2 = x(\pm 2 \pm x).$$

0-helyek: $x_1 = 0$ és $x_2 = \mp 2$. (Éspedig $x_2 = -2$ az a) és d) esetben; $x_2 = 2$ a b) és c) esetben.)

$$\xi = -\frac{a_1}{2a_2} = \mp\frac{2}{2} = \mp 1$$



58. ábra

(éspedig $\xi = -1$ és a) és d) esetben, $\xi = 1$ a b) és c) esetben).

$$\eta = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = -\frac{4}{\pm 4 \cdot 1} = \mp 1$$

(éspedig $\eta = -1$ az a) és c) esetben, $\eta = 1$ a b) és d) esetben!).

3. Keresendő α szögű ferde hajításnál a pályagörbe explicit egyenlete, valamint a test maximális függőleges és vízszintes eltávolodása, légüres térben.

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha;$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2$$

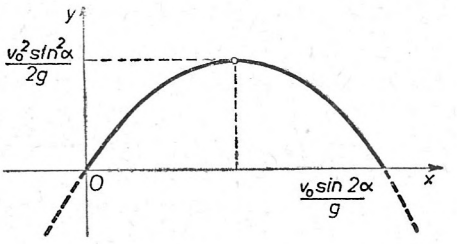
a paraméteres pályaegyenlet.

Megoldás:

A t kiküszöbölésével kapjuk:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$ (59. ábra.),

tehát jelöléseinkkel:



59. ábra

$$a_0 = 0; \qquad a_1 = \operatorname{tg}\alpha; \qquad a_2 = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}$$

A maximális függőleges eltávolodást a csúcspont ordinátája adja:

$$\eta = y_{\max} = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = -\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{4\left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right)} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

A maximális vízszintes eltávolodás a 2. zérushelyig:

$$x_2 = (x_0)_2 = -\frac{a_1}{a^2} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}} = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$$

4. Ábrázoljuk az E vonatellenállást a sebesség függvényében a következő tapasztalati képlet alapján:

$$E_{\text{kg}} = \left(2{,}4 + \frac{v^2 \text{ km/óra}}{1000}\right) \cdot Q \text{ tonna.}$$

(Q a terhelés, v a sebesség)
Legyen $Q = 1000$ tonna!

5. Állapítsuk meg az E térerősségű elektromos térbe az erővonalakra merőlegesen v sebességgel belőtt elektron pályaegyenletét, azaz az $y = f(x)$ függvényt, ha a mozgásegyenletek:

$$x = v \cdot t;$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot E}{m} t^2$$

($\frac{e}{m}$ az elektron fajlagos töltése). Hogy függenek a parabola jellemző adatai E-től, ill. v-től?

Állapítsuk meg a következő másodfokú függvényeknél a maximum helyét és értékét; továbbá a parabola jellemző adatait!

6. $y = -2x^2 + x - 1$. Maximum van, hiszen $a_2 = -2 < 0$.

7. $y = -x^2 - 3x + 2$.

8. $y = 5 - x^2$.

9. $y = -2x^2 + ax - a^2$.

10. $y = a^2x - b^2x^2$.

Állapítsuk meg a következő 2. fokú függvényeknél a minimum helyét és értékét.

11. $y = x^2 + 4x - 2$.

Megoldás:

Minimum van, mert $a_2 = 1 > 0$. Helyét és értékét a parabola csúcspontjának a koordinátái adják. Változatosság kedvéért dolgozzunk a gyökökkel:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}.$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -2 = \xi;$$

$$y_0 = f(x_0) = 4 - 8 - 2 = -6 = \eta.$$

12. $y = 2x^2 - 1{,}5x + 0{,}6$

13. $y = 1 - 3x + 6x^2$

14. $y = a^2x^2 - a^4$

15. $y = (ax + b)(ax - 2b)$

Megjegyzendő, hogy az előbbi példák eredményei akkor is ugyanazok, ha a kérdést úgy tesszük fel: milyen ξ és η eltolással adódnak az $y = a_2x^2$ görbéjéről az $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ alakú a 6—15. példákban megadott függvények görbéi.

Állapítsuk meg grafikusan az alábbi $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ alakú 2. fokú egyenlet gyökeit (vagy ami ugyanaz: az $y = a_2x^2 + a_1x + a^2$ másodfokú függvény 0-helyeit) oly módon, hogy keressük az $y_1 = x^2$ parabola és az $y_2 = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_0}{a_2}$ egyenes metszéspontjainak abszcisszáit: más szóval azon x-értékeket, melyeknél teljesül:

$$x^2 = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_0}{a_2},$$

vagy 0-ra redukálva:

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0.$$

A grafikusan nyert eredményeket számítással ellenőrizzük!

16. $y = 2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Megoldás:

A fentiek szerint $y_1 = x^2$; $y_2 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$. Ábrázolva a két görbét, az $x_1 \cong -1$ és az $x_2 \cong \frac{5}{2}$ helyen van a metszéspontjuk.

Ellenőrizve:

$$2x^2 - 3x + 5 = 2(x + 1)(x - 2{,}5).$$

17. $x^2 - x - 2{,}25 = 0.$

18. $3{,}1x^2 - 14x + 5{,}8 = 0.$

19. $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

20. $3x^2 - 8x + 7 = 0.$

21. Szabadesés légellenállással.

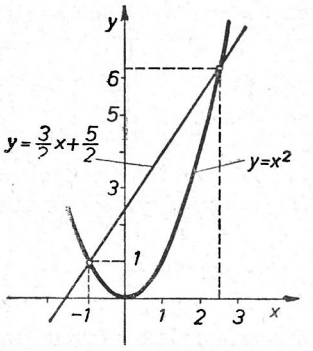
Ha az ellenállást a sebesség négyzetével arányosnak tételezzük fel, akkor a gyorsító erő kifejezése így alakul:

$$P = mg - kv^2,$$

ami matematikailag

$$y = a_0 + a_2x^2$$

alakú másodfokú racionális egészfüggvény. Mikor lesz $P = 0$? Ábrázoljuk! Vegyük az ábrában szaggatottan figyelembe, hogy fizikailag a P erő negatív nem lesz, mert a P kifejezésben szereplő $-kv^2$ tag a súrlódás hatását realizálja; márpedig a súrlódó erő sohasem lehet nagyobb az őt keltő erőnél. Fizikailag tehát csak a parabola maximumhelye és valamelyik O-hely közötti szakasznak van fizikai értelme (hogy melyiknek, az a koordinátarendszer tengelye és a mozgás iránya viszonyától függ). A $P = 0$ eset fizikailag egyébként annyit jelent, hogy megszűnt a gyorsítóerő, a sebesség tehát állandó marad, s így az erő is!



60. ábra

5. §. d)

1. Milyen eltolással állítható elő az $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ függvény görbéje valamilyen $y = bx + x^3$ alakú függvény görbéjéből?

Megoldás:

A bevezetőben közölt képlet alapján:

$$b = a_1 - \frac{a_2^2}{3a_3} = -1 - \frac{(-3)^2}{3 \cdot 1} = -4,$$

tehát $y = x^3 - 4x$ az a függvény, amelyből a kérdezett eltolással keletkezik. Az eltolások mértéke

$$\xi = -\frac{a_2}{3a_3} = -\frac{-3}{3 \cdot 1} = 1$$

és

$$\eta = a_0 - \frac{a_1a_2}{3a_3} + \frac{2a_2^3}{27a_3^3} = 0.$$

(Helyes, ha a képleteket a példa számadataival újra meghatározzuk!)

2. Hasonló a feladat az $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ függvényre vonatkozólag.

3. Milyen függvényt kapunk, ha az $y = 9x - x^3$ függvényen $x = x' - 2$; $y = y' + 1$ transzformációt hajtjuk végre?

4. Hasonló a feladat az

$$y = x^3 - 16x$$

és az $x = x' + 3; \quad y = y' - 2$

adatokkal.

5. Milyen lineáris transzformációt kell alkalmazni, hogy az $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ függvény négyzetes és állandó tagja eltűnjék?

Megoldás:

a) Csak a másodfokú és az állandó tagokat kiírva, az $x = x' - \xi$; $y = y' - \eta$ transzformáció végrehajtása közben:

$$y' - \eta = \ldots - 3x'^2 \cdot \xi \ldots - \xi^3 - 3x'^2 \ldots - 3\xi^2 \ldots + 9\xi - 5.$$

Ahhoz, hogy a másodfokú tag eltűnjék, együtthatójának a

$$-3\xi - 3 = 0$$

egyenletet kell kielégítenie.

$$\xi = -1.$$

Hogy az állandó tag eltűnjék:

$$\eta - \xi^3 - 3\xi^2 + 9\xi - 5 = 0$$

kell teljesüljön.

$$\eta = -1 + 3 + 9 + 5 = 16$$

b) Így $x = x' + 1$; $y = y' - 16$;

ezzel $y' = -12x' + x'^3$.

6. Oldjuk meg ugyanezt a feladatot az $y = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$ függvénnyel kapcsolatban is

7. Toljuk el önmagával párhuzamosan a koordinátarendszert úgy, hogy az

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 8$$

függvényből eltűnjenek a négyzetes és állandó tagok.

8. Oldjuk meg ugyanazt a feladatot az

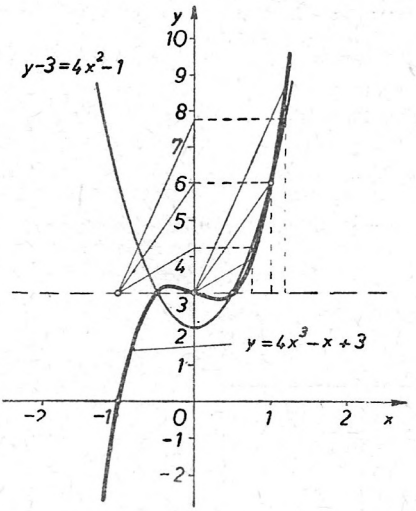
$$y = 2x^3 + 4x^2 - 6x - 10$$

függvényre vonatkozóan is!

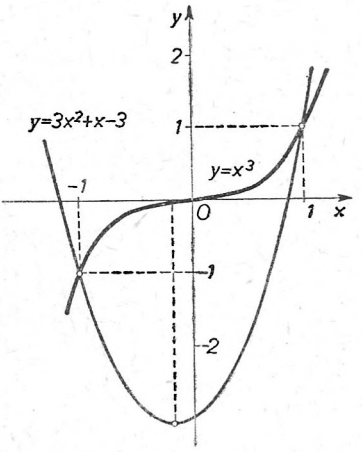
9. Ábrázolandó és vizsgálandó az $y = 4x^3 - x + 3$ függvény.

Megoldás:

$y - 3 = x(4x^2 - 1)$ alakban felírva látható, hogy görbéje az $y = x(4x^2 - 1$ görbéjéből $\eta = 3$ eltolással keletkezik. Ábrázoljuk tehát az utóbbit (x)-szel való grafikus szorzással; (5. §. *a)* l.) és toljuk el felfelé három egységgel. (L. 61. ábrát.)



61. ábra



62. ábra

Milyen szuperpozícióval adódnak az alábbi függvények? Ábrázoljuk őket!

10. $y = x^3 + 3x$. E függvény nyilván előállítható az $y_1 = x^3$ és $y_2 = 3x$ függvények összegeként.

Hasonlóan ábrázoljuk az alábbi függvényeket, esetleg az x-szel való grafikus szorzást is felhasználva:

11. $y = -x^3 + 2x - 2$. 12. $y = 2x^3 - 3x + 5$. 13. $y = x^3 - x + 1$.

Ábrázoljuk az $y = x^3$ függvényt, és használjuk fel az alábbi 3. fokú egyenletek grafikus megoldására (ellenőrzés behelyettesítéssel).

14. $$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0.$$

Megoldás: (L. a 62. ábrát!)

Ez felfogható úgy is:

$$y_1 = x^3 = 3x^2 + x - 3 = y_2.$$

A két görbe metszéspontjainak abszcisszái elégítik ki az egyenletet. A metszéspontok abszcisszái, vagyis az egyenlet gyökei:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3.$$

15. $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$ 16. $x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$

17. $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$.

Állapítsuk meg a függvényábráról (leolvasással) az alábbi függvényekre vonatkozólag, az adott szakaszon, a maximális és minimális ordinátát és a hozzátartozó abszcisszát:

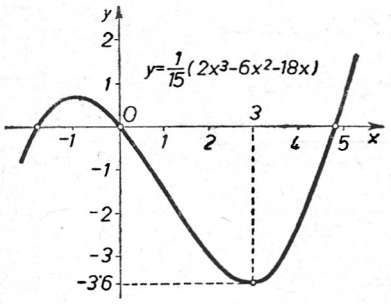
18. $y = \frac{1}{15}(2x^3 - 6x^2 - 18x)$; $a - 2 \leqq x \leqq 4$ közön.

Megoldás:

Átalakítva: $y = \frac{2}{15}x(x^2 - 3x - 9)$;

tehát a gyökök: $x_1 = 0$; $(x_2 \cong 4{,}86)$; $x_3 \cong -1{,}86$.

Értéktáblázatot készítve és ábrázolva (vagy a grafikus szorzást elvégezve):



63. ábra

Maximum az $x \cong -1$ helyen mutatkozik, értéke $y \cong \frac{2}{3}$;

minimum az $x \cong 3$ helyen mutatkozik, értéke $y \cong -3{,}6$.

19. $y = 3x^3 - 2x^2$; a $-2 \leqq x \leqq 2$ közön.

20. $y = 3x - x^3$; a $-1 \leqq x \leqq 1$ közön.

5. §. *e)*

1. Keresendő azon legalacsonyabb fokú racionális egészfüggvény, amelynek gyökei $x_{1,2} = \pm 1$; $x_{3,4} = \pm 2$, és amely az $x = 0$ helyen az $y = 1$ értéket veszi fel.

Megoldás: Egy egyelőre ismeretlen A együtthatóval írhatjuk:

$$y = A(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = A(x^2-1)(x^2-4) = A(x^4 - 5x^2 + 4);$$

$$y(0) = 4A,$$

tehát $A = \frac{1}{4}$. A keresett függvény:

$$y = \frac{1}{4}(x^4 - 5x^2 + 4).$$

Ebből látható, hogy az origóra szimmetrikus gyökök következtében páros függvénnyel van dolgunk, melynek görbéje az y-tengelyre szimmetrikus 4. fokú para-

bola. Megjegyzendő, hogy 4 és magasabbfokú polinom esetében általában a tengelyszimmetria nincs biztosítva, mert a polinomból a páratlan kitevőjű tagok transzformációval általában nem tüntethetők el, hasonlóképp a párosak sem.

2. Ábrázoljuk az $y = x^5 - 4x^4 + 4x^3$ függvényt grafikus szorzások segítségével másodfokú parabolából.

3. Állítsuk elő azon legalacsonyabb fokú polinom egyenletét, amely az $x_1 = 2$, az $x_2 = 3$ helyeken az 1, az $x_3 = -2$ és az $x_4 = -3$ helyeken is a $+1$ értéket veszi fel, és $x_5 = 0$ helyen 0 értékű!

4. Ábrázoljuk az $y = x_4 - 5x^2 + 4$ függvényt a közvetett függvényekre az 1. § *b) β)*-ban tanult szerkesztés segítségével másodfokú parabolák felhasználásával!

6. §. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK

a) A racionális törtfüggvényekről általában

α) **Előállítási módok.** *Képlete a független változóból és állandókból épül fel az összeadás, kivonás, szorzás, (illetve az ismételt szorzás, azaz a hatványozás) és az osztás véges számú alkalmazásával.*

Vizsgálat céljára átrendezett *általános alakja* (a műveletek elvégzése, törtek összevonása és rendezés után):

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}.$$

Röviden tehát így is definiálhatnók: Azokat a függvényeket hívjuk racionális törtfüggvényeknek, amelyek megfelelő algebrai átalakítások (pl. a kijelölt műveletek elvégzése, törtek összevonása általában ún. *azonos átalakítások)* után mint két polinom hányadosa írhatók fel.

Mint a közönséges törteknél, itt is beszélünk valódi és áltörtfüggvényekről; azonban a számláló és a nevező értékviszonya helyett itt a fokszámok viszonya a döntő:

ha $m > n$: *valódi törtfüggvény*,
ha $m \leqq n$: *áltörtfüggvény*

a neve; utóbbi esetben osztással egy polinom és egy valódi törtfüggvény összegeként állítható elő.

Pl.:

$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 2x - 8}; \quad n = 2; \quad m = 3; \quad m > n,$$

tehát valódi törtfüggvény;

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}; \quad n = 3; \quad m = 2; \quad m > n,$$

tehát áltörtfüggvény. Osztva a számlálót a nevezővel, nyerjük, hogy

a hányados: $x - 8$. a maradék: $30x + 60$,

a tört tehát más alakban írható:

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 5x + 6} = x - 8 + \frac{30x + 60}{x^2 + 5x + 6}.$$

A törtfüggvény elemzésénél nagyon fontos a tényezőkre bontott alak; ebből a függvény 0-helyei és szakadási helyei könnyen felismerhetők.

Pl.: $$y=\frac{(3x-2)(x+3)(4x-3)}{10(x+2)(x-1)}.$$

Végül az integrálszámításnál nagyjelentőségű a törtfüggvény *részlettörtekre bontott* alakja.

Az algebra egy fontos tétele szerint minden *valódi* törtfüggvény (áltörteknél tehát részlettörtekre bontás előtt osztást kell végeznünk!) felbontható első, ill. másodfokú nevezőkkel – és ezeknél eggyel alacsonyabb fokú számlálókkal – rendelkező törtek összegére, hacsak nincs a nevezőben többszörös gyöktényező.

A nevezők megegyeznek az – egyenletmegoldás útján meghatározott – eredeti nevező gyöktényezőivel. A számlálókat úgy állapítjuk meg, hogy a régi és új alak egymással (az új alak törtjeinek formális eltávolítása után) azonosan megegyezzék. Többszörös gyök esetén – amikor is az illető gyöknek megfelelő gyöktényező magasabb hatványon szerepel – az ennek megfelelő tagok száma a felbontásban a kitevővel egyező. Éspedig 1-től növekvő kitevőjű nevezővel és mindig állandó (ha a gyöktényező lineáris), illetve lineáris (ha a többszörös gyöktényező kvadratikus) számlálóval.

β) **Az $y=\frac{1}{x^n}$ alakú törtfüggvények** az ún. „n-edfokú hiperbolák" a legegyszerűbb törtfüggvények.

b) «Lineáris» törtfüggvények

Azokat a függvényeket nevezzük lineáris törtfüggvényeknek, amelyeknek számlálója legfeljebb, nevezője pedig pontosan elsőfokú.

c) «Magasabbfokú» törtfüggvények

α) **Általános alakjuk** $$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}\equiv\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

A következő fontos fogalmak lépnek itt előtérbe:

β) **Zérushely:** *olyan x_z hely, ahol a $P_n(x)/Q_m(x)$ törtfüggvény számlálója zérus* $[P_n(x_z)=0]$, *de nevezője zérustól különböző értékű* $[Q_m(x_z)\neq 0]$.

Az x_z zérushely *ν-szörös*, ha a számláló előállítható $P_n(x)=(x-x_z)^\nu\cdot P_{n-\nu}(x)$ $[P_{n-\nu}(x_z)\neq 0]$ alakban. Ha a ν *páratlan*, akkor x_z-*nél* a függvény – a zérus értéken áthaladva – előjelt vált, ha pedig *páros*, akkor nem. Pl. az

$$y=\frac{x^2-4x^2+4}{x^4-1}=\frac{x(x-2)^2}{x^4-1}$$

függvénynek $x_{z1}=0$ egyszeres, az $x_{z2}=2$ pedig kétszeres zérushelye.

γ) **Pólus:** olyan x_p *hely, ahol a $P_n(x)/Q_m(x)$ törtfüggvény nevezője zérus* $[Q_m(x_p)=0]$, *de számlálója* zérustól különböző értékű $[P_n(x_p)\neq 0]$.

Az x_p helyhez közeledve, a függvény *végtelen határértékhez*, görbéje az $x=x_p$ *függőleges aszimptótához* tart; magán az x_p helyen a függvény – mint a zérussal való osztás – nincs értelmezve. Az x_p pólus *μ-edrendű*, ha a nevező előállítható $Q_m(x)=(x-x_p)^\mu\cdot Q_{m-\mu}(x)$ $[Q_{m-\mu}(x_p)\neq 0]$ alakban; ilyenkor a függvény „μ-edrendűen", azaz $c/(x-x_p)^\mu$ $[c=P_n(x_p)/Q_{m-\mu}(x_p)]$ módján tart a végtelenhez. Ha a μ rendszám *páratlan*, akkor x_p-nél a függvény – a végtelen határértékkel együtt – előjelet vált, ha pedig *páros*, akkor nem. Pl. az

$$y=\frac{x-3}{(x-2)(x+4)^2}$$

függvénynek $x_{p1}=2$ elsőrendű, $x_{p2}=-4$ pedig másodrendű pólusa.

δ) **Megszüntethető szingularitás:** *olyan x_s hely, ahol a $P_n(x)/Q_m(x)$ törtfüggvénynek mind a számlálója, mind a nevezője zérus értékű, megegyező többszörösséggel.*

Ha ez utóbbi σ, akkor a függvény előállítható

$$y=\frac{(x-x_s)^\sigma\cdot P_{n-\sigma}(x)}{(x-x_s)^\sigma\cdot Q_{m-\sigma}(x)}\quad[P_{n-\sigma}(x_s)\neq 0,\ Q_{m-\sigma}(x_s)\neq 0]$$

alakban. E függvény értéke nyilván minden $x\neq x_s$ helyen az egyszerűsítéssel nyert $y_e=P_{n-\sigma}(x)/Q_{m-\sigma}(x)$ függvényével egyenlő, magán az $x=x_s$ helyen azonban — a semmitmondó 0/0 alak folytán — nincs értelmezve s így ott nem is folytonos. Ugyanott azonban *véges határértéke* van, nevezetesen

$$\lim_{x\to x_s} y=y_e(x_s)=\frac{P_{n-\sigma}(x_s)}{Q_{m-\sigma}(x_s)}=c.$$

Az adott $y(x)$ függvény x_s helyi szingularitását (vagyis az értelmezettség és a folytonosság ottani hiányát) értelmezésének

$$y(x_s)=\lim_{x\to x_s} y=c$$

kiegészítésével lehet megszüntetni. Az így nyert $y_k(x)$ függvény már mindenütt egyenlő s így helyettesíthető is az egyszerűsített $y_e(x)$ függvénnyel. Pl. az

$$y=\frac{x-2}{(x-2)\,(x+3)}$$

függvénynek $x_s=2$ megszüntethető szingularitása; megszüntetése az

$$y(2)=\lim_{x\to 2} y=\left[\frac{1}{x+3}\right]_{x=2}=\frac{1}{5}$$

értelmezéskiegészítéssel történhet: az így nyert függvény már megegyezik az egyszerűsített $y_e=1/(x+3)$ függvénnyel.

ε) **Aszimptoták.** *A $P_n(x)/Q_m(x)$ racionális törtfüggvény görbéjének aszimptotáján* az osztással nyert

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R_{n-m}(x)=\frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$$

alak $R_{n-m}(x)$ *egész részének görbéjét értjük; ehhez* a törtfüggvény görbéje az $|x|$ növelésével, vagyis az origótól távolodva, mind jobban hozzásimul, ordinátakülönbségük

$$\lim_{|x|\to\infty}\left|\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}-R_{n-m}(x)\right|=\lim_{|x|\to\infty}\frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}=0$$

magatartása folytán.

Ezen aszimptota tehát $n-m>1$ (áltört) esetén $(n-m)$-edfokú parabola, $n-m=1$ (áltört) esetében ferde egyenes, $n=m$ (áltört) esetén vízszintes egyenes $(y=c\neq 0)$, $n<m$ (valódi tört) esetén pedig $[R_{n-m}(x)\equiv 0$ folytán] maga az x tengely $(y=0)$. Ide soroljuk még — mint fentebb már említettük — az x_p pólusnál adódó s a függvény $|y|\to\infty$ magatartásával kísért $x=x_p$ *függőleges aszimptotát.* Ennek egyik végére balról, a másikra jobbról simul a görbe — páratlan rendű pólus esetén, mindkét oldalról egyazon „végére" pedig — páros rendű pólus esetén. Megjegyzendő, hogy az aszimptoták és néhány görbepont (pl. zérushely) ábrázolása — a ráhajlások és átmenetek megállapításával — már többnyire elegendő alapot nyújt a görbe felvázolására. Pl. az

$$y=\frac{x^4-1}{x}=x^3-\frac{1}{x}$$

függvény görbéjének aszimptotái: az $y=x^3$ harmadfokú parabola és az $x_p=0$ függőleges egyenes (az y tengely): ábrázoljuk mindezeket!

Feladatok:

6. §. *a) α)*

1. Bontsuk részlettörtekre az $y = \dfrac{x+2}{x^3-2x^2-8x}$ függvényt.

Megoldás:

a) A nevező gyökhelyeit meghatározzuk és a nevezőt szorzattá bontjuk:

$$y = \frac{x+2}{x^3+2x^2-8x} = \frac{x+2}{x(x+4)(x-2)}.$$

A nevező minden tényezője egyszeres gyököt jelöl és lineáris. Így:

$$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-2}.$$

b) A részlettörtes alakot közös nevezőre hozzuk, majd az új számlálót, a szorzások elvégzése után, x hatványai szerint rendezzük:

$$y = \frac{A(x+4)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+4)}{x(x+4)(x-2)} =$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax-8A+Bx^2-2Bx+Cx^2+4Cx}{x(x+4)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B+C)+x(2A-2B+4C)-8A}{x(x+4)(x-2)}.$$

c) Ahhoz, hogy ez a tört azonosan megegyezzék az eredetivel, szükséges hogy valamennyi hatványa ugyanazokkal az együtthatókkal szerepeljen mindkét alak számlálójában (ui. a nevezők szemmel láthatóan azonosak),* azaz:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ 2A-2B+4C &= 1 \\ -8A &= 2. \end{aligned}$$

A három egyenletből a három ismeretlen kiadódik:

Így: $A = -\frac{1}{4}$; $B = -\frac{1}{12}$; $C = \frac{1}{3}$.

Megjegyzés: Az itt alkalmazott módszert «állandók összehasonlításának módszere» néven ismerik vagy «ismeretlen együtthatók módszere» címen.

Ismertetünk egy másik módszert is az állandók meghatározására, amelyet *«gyökhelyek felhasználásának módszere»* néven fogunk idézni. Utóbbi lényegesen gyorsabb, mint az «ismeretlen együtthatók módszere». Sajnos, többszörös gyökök esetén nem szolgáltat elegendő egyenletet; kvadratikus gyöktényezők esetén pedig

* Azok tehát kezdettől fogva elhagyhatók és csupán a számlálók egyeztetésére szorítkozhatunk.

csak akkor alkalmazható, ha van lineáris gyöktényező is — de ilyenkor is kevesebb egyenletet szolgáltat, mint amennyi az ismeretlen. Ezekben az esetekben is célszerű azonban felhasználni a vele meghatározható állandók megállapítására. Ezeket az értékeket azután jól használhatjuk az «állandók összehasonlításának módszere» alapján felírt egyenletrendszer egyszerűsítésére, és a hiányzó együtthatók megállapítására. Ezt «kombinált módszer» néven idézzük.

A «gyökhelyek felhasználásának módszere» azon alapszik, hogyha az *eredeti és az összevont, ismeretlen együtthatós tört számlálója* azonosan egyenlőek, azaz x bármely értékénél megegyeznek, akkor *megegyeznek a nevező valamennyi zérushelyénél is.* Ezen egyenletek felírása pedig két szempontból is előnyösebb, mint az «állandók összehasonlításának módszere» esetén kapott egyenleteké: először is, a formális összevonás után nem kell a számlálóban a kijelölt műveleteket elvégezni és összevonni; másodszor, a kapott egyenletek kevesebb ismeretlent tartalmaznak, így könnyebben megoldhatóak.

Pl. a 6. § *a) α)* 1. feladathoz visszatérve:

$$A(x+4)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+4) \equiv x+2.$$

Az egyenlőség (azonosság) fennáll $x = 0$-nál. Ezt helyettesítve:

$$A \cdot 4 \cdot (-2)+0 \cdot B+0 \cdot C = 2, \qquad \text{ebből: } A = -\frac{1}{4},$$

$x = -4$-et helyettesítve: $B \cdot (-4) \cdot (-6) = -2,$ ebből: $B = -\frac{1}{12},$

$x = 2$-t helyettesítve: $C \cdot 2 \cdot 6 = 4,$ ebből: $C = \frac{1}{3},$

teljes megegyezésben, de lényegesen gyorsabban, mint a másik módszerrel.

2. Bontsuk részlettörtekre az $y = \dfrac{2x^2-3x}{(x+3)(x^2+x+1)}$ törtet.

Megoldás:

a) Az x^2+x+1 másodfokú kifejezést nem fogjuk lineáris gyöktényezőkre bontani, mert zérushelyei komplexek. Így a felbontás:

$$y = \frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Közös nevezőre hozva és rendezve:

$$y = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-3)}{(x^2+x+1)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2+Ax+A+Bx^2-3Bx+Cx-3C}{(x-3)(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{x^2(A+B)+x(A-3B+C)+A-3C}{(x-3)(x^2+x+1)}.$$

b) Az összehasonlításból kapott egyenletek:

$$A+B=2$$
$$A-3B+C=-3$$
$$A-3C=0.$$

c) A kombinált módszert használva, egy újabb egyenletet kapunk, ha az

$$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-3)=2x^2-3x$$

azonosságban az $x=3$ értéket helyettesítjük:

$$13A=9, \qquad \text{amiből} \qquad A=\frac{9}{13}.$$

Ennek alapján a *b)* pont egyenleteiből B és C lényegesen könnyebben számítható

A további számolást már az olvasóra bízzuk.

3. Bontsuk részlettörtekre az:

$$y=\frac{2x^5-20x^3-4x^2+23x+24}{(x-1)^3\cdot(x^2+2x+2)^2}$$

függvényt!

Megoldás:

a) A háromszoros, illetve kétszeres gyöknek megfelelően a részlettörtes alak:

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+2}+\frac{Fx+G}{(x^2+2x+2)^2}.$$

A fentebbi módon eljárva:

$$z=\frac{A(x-1)^2(x^2+2x+2)^2+B(x-1)(x^2+2x+2)^2+C(x^2-2x+2)^2}{(x^2+2x+2)^2(x-1)^3}+$$
$$+\frac{(Dx+E)(x^2+2x+2)+(x-1)^3+(Fx+G)x-1)^3}{(x^2+2x+2)^2(x-1)^3}$$

Az $x=1$ helyettesítéssel $C=1$ adódik.

A műveletek elvégzését és a további számolást az olvasóra bízzuk!

Bontsuk részlettörtekre az alábbi törteket:

4. $$y=\frac{x^5-3x^4-4x^2+9x-5}{(x-3)(x^2+x+2)}.$$

(Megjegyzés: Áltörtfüggvényről lévén szó, először osztanunk kell!)

5. $$y=\frac{x^4-x^2+6x+15}{(x-1)^2\cdot(x^2+3x+3)}.$$

6. $$y=\frac{3x^4+17x^3+34x^2+30x+9}{(x^2+x+1)(x^2+4x+5)}.$$

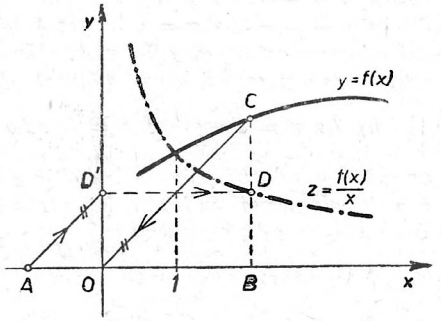
7. $y = \dfrac{28x+25}{(x^2+x+3)^2 \cdot (x-2)}$.

8. $y = \dfrac{23-72x+84x^2-25x^3}{(1-x)^4(2+3x)}$.

6. §. a) β)

1. A törtfüggvények grafikonjának egyszerűbb szerkesztése céljából bemutatjuk hogyan lehet az x-szel való osztást grafikusan elvégezni, azaz az $y = f(x)$ görbe alapján a $z = \dfrac{f(x)}{x}$ görbe pontjait megszerkeszteni.

(Nézzük át az 5. §. a) 1. feladatot is!) A koordinátarendszer $(-1,0)$ pontját ismét A-val, a görbe kiválasztott $[b, f(b)]$ pontját C-vel, a $(b, 0)$ pontot B-vel, és a keresett $z(b) = \dfrac{f(b)}{b}$ ordinátájú pontot D-vel jelölve, a szerkesztés menete:



64. ábra

Kössük össze az origót C-vel, és az így kapott OC egyenessel párhuzamost húzunk A-ból. A párhuzamos az y tengelyt D'-ben metszi. Ezt kivetítve a BC egyenesre ($x = b$ egyenes), megkapjuk a keresett D pontot.

Igazoljuk a szerkesztés helyességét.

2. Szerkesszük meg az előző feladatban közöltek alapján az $y = 1$ egyenesből az $y = \dfrac{1}{x}$ görbe néhány pontját.

3. A 6. § a) β) 1. feladat szerkesztésének kétszeri ismétlésével szerkesszük meg az $y = \dfrac{1}{x^2}$ függvény néhány pontját.

4. A 6. § a) β) 1. feladat szerkesztése alapján rajzoljuk fel az

$$y = \frac{2x-3}{x} = 2 - \frac{3}{x}$$

görbét vázlatosan.

5. Rajzoljuk fel, az előzőkben ismertetett szerkesztés segítségével az

$$y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} = \frac{x^2-3x+5}{x^2}$$

függvény görbéjét vázlatosan!

6. Összehasonlítás céljából lássuk együtt az $y = \dfrac{1}{x^n}$ függvények görbéit, amikor $n = 1, 2, 3, 4$.

7. Vizsgáljuk meg az $y = \dfrac{1}{x^n}$ függvény jellegzetességeit $n = 1$ és $n = 2$ esetében.

Megoldás:

a) Az $n = 1$ esetben $y = \frac{1}{x}$. A koordinátarendszer elforgatásának tárgyalásánál látni fogjuk, hogy ez az $x^2 - y^2 = 2$ egyenlőszárú hiperbola egyenletéből egy 45°-os forgatásnak megfelelő lineáris transzformációval származtatható. Ezek szerint ez egy olyan hiperbola egyenlete, melynek aszimptotái a koordinátatengelyek, valós féltengelyének hossza pedig $a = \sqrt{2}$. Az $x = 0$ helyen a függvény nincs értelmezve; ha x pozitív értékeken át tart a 0-hoz, jelekben $x \to +0$, akkor $y \to +\infty$, ha pedig x negatív értékeken át tart a 0-hoz, jelben $x \to -0$, akkor $y \to -\infty$. Az $x = 0$ helyen tehát a függvénynek (végtelen) szakadása van, sőt a függvény itt előjelet vált. Más néven a függvénynek itt (elsőrendű) pólusa van. (Ált. a páratlan rendű pólusra jellemző az előjelváltás.)

b) Az $n = 2$ esetben $y = \frac{1}{x^2}$. Az $x = 0$ helyen szintén nincs értelmezve, de az előző feladattal ellentétben $x \to \pm 0$ esetén $y \to +\infty$, vagyis a függvény az $x = 0$ helyen nem vált előjelet. Szokásos elnevezés szerint ilyen helyen a függvénynek páros rendű pólusa van.

8. Magyarázzuk (és esetleg ábrázoljuk) az $y = \frac{4}{(x-2)^2} - 3$ függvényt.

Megoldás:

Átalakítva: az $\frac{y+3}{4} = \frac{1}{(x-2)^2}$ alakon látható, hogy görbéje az $y = \frac{1}{x^2}$ -éből $q = 4$; $\eta = -3$; $\xi = 2$ nyújtás, illetve eltolásokból álló lineáris transzformációval keletkezik.

9. Magyarázzuk (és esetleg ábrázoljuk) az

$$y = \frac{3}{(x+2)^3} + 5$$

függvényt.

10. Felírandó azon legegyszerűbb törtfüggvény, melynek elsőrendű pólusa van az $x = 4$ helyen, és $x = 2$-nél a függvényérték: $y(2) = -5$.

Megoldás:

$y = \frac{A}{x-4}$ a legegyszerűbb ilyen függvény. A értékét a második feltétel alapján számíthatjuk:

$$y(2) = \frac{A}{2-4} = -5;$$

ebből: $A = 10$;

tehát: $y = \frac{10}{x-4}$

6. §. *b)*

1. Ábrázoljuk az $y = \frac{3-4x}{5+2x}$ függvényt az $y = \frac{1}{x}$ hiperbolából nyújtással és eltolással származtatva.

Megoldás:

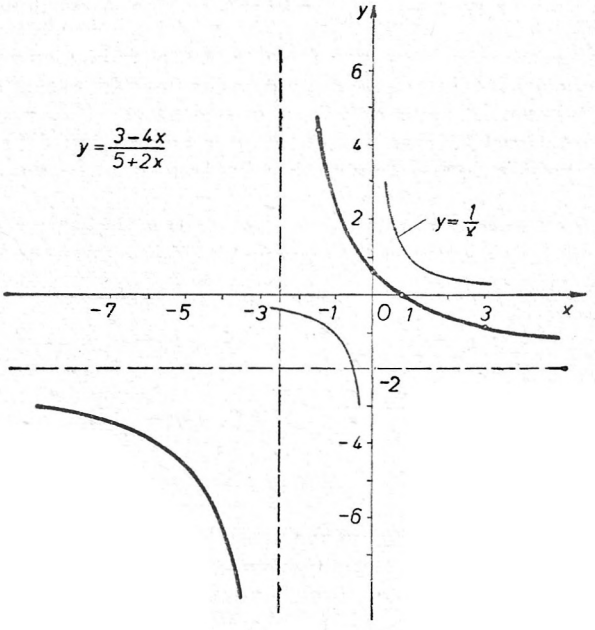
a) A feladat megoldása két úton történhetik. Az egyik eljárás szerint az $y_1 = \frac{1}{x_1}$ hiperbolaegyenletből az $y_1 = ay+b$; $x_1 = cx+d$ lineáris transzformációt elvégezve, alakilag a felírt függvényhez hasonló alakú kifejezést kapunk, az állandókat azután két, alakilag megegyező kifejezés azonossága alapján számítjuk. Ennél azonban lényegesen egyszerűbb a második módszer Mivel a megadott függvény áltört, viszont az $\frac{1}{x}$ valódi tört, kézenfekvő, hogy osztással az előbbit is valódi törtfüggvénnyé alakítsuk.

Az osztást elvégezve kapjuk, hogy:

$$y = \frac{3-4x}{5+2x} = -2 + \frac{13}{2x+5}.$$

Ebből: $$\frac{y+2}{13} = \frac{1}{2x+5}.$$

b) Most már leolvashatjuk, hogy az adott törtfüggvény az $y_1 = \frac{1}{x_1}$ függvényből az $y_1 = \frac{1}{13}(y+2)$; $x_1 = (2x+5) = 2\left(x+\frac{5}{2}\right)$ transzformációval keletkezett,



65 ábra

azaz az $y_1 = \frac{1}{x_1}$ grafikonján az y tengely irányában 13-szoros nyújtást, ezt követően 2 egységnyi «süllyesztést» kell végeznünk – az x tengely irányában viszont felére zsugorítást, majd ezt követően $\frac{5}{2} = 2{,}5$ egységnyi «balra» történő eltolást kell végeznünk.

2. Mi történik az előző feladat függvényének aszimptotáival a transzformáció közben? Mutassuk ki közvetlen okoskodással is az aszimptoták helyzetét.

Megoldás:

a) Tekintettel arra, hogy mindkét változóval kapcsolatos transzformációnál először a nyújtást végeztük, továbbá arra, hogy az eredeti görbének a két tengely volt az aszimptotapárja, a nyújtások az aszimptoták helyzetén nem változtattak, csak az eltolások.

Az y tengely irányában történő 2 egységnyi «süllyesztés» folyamán az eredeti x-tengellyel egybeeső aszimptota is süllyedt, így egyenlete most: $y = -2$.

Az x-tengely irányában történő eltolás következtében pedig a másik aszimptota egyenlete: $x = -\frac{5}{2}$.

b) Közvetlen okoskodás alapján beláthatjuk, hogy az egyik aszimptota ott lesz, ahol a tört nevezője 0-vá válik (azaz ahol y minden határon túl nő, illetve csökken). Ez valóban az $x = -\frac{5}{2}$ helyen következik be. A másik aszimptota helyzetét pedig az határozza meg, hogy mi történik a törttel, miközben x minden határon túl nő. Könnyen belátható, hogy elég nagy x értékek esetén a számláló értékét elsősorban a $(-4x)$, a nevezőét pedig a $2x$ fogja meghatározni. Elég nagy x-eknél tehát a számláló jó közelítéssel kétszer akkora, mint a nevező, éspedig annál jobb közelítéssel, minél nagyobb x. Így – ha x minden határon túl nő – valóban a (-2)-höz tart y.

Milyen lineáris transzformációval keletkeznek az alábbi függvények az $xy = 1$ függvényből. Írjuk fel az aszimptoták egyenletét. Esetleg gyakorlásképp ábrázolhatjuk is őket!

3. $y = \frac{2x-3}{5x+7}$. 4. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

5. $y = \frac{2x}{3-x}$. 6. $y = \frac{2x-5}{3x-7{,}5}$.

6. §. *c)*

Jellemezzük az alábbi törtfüggvények viselkedését pólusaik, aszimptotáik és zérushelyeik segítségével. Ezek alapján készítsük el vázlatos grafikonjukat oly módon, hogy a grafikon azon helyei közelében, ahol az eddigiek nem elegendőek az ábrázolásra - pl. a környezeti szélsőértékhelyek közelében – pontozzuk a görbét!

1. $y = \dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$; $n = 1$; $m = 2$; $n < m$.

Megoldás:

a) A törtfüggvény tehát valódi. Pólusai a nevező gyökhelyeinél vannak:

$$x_1 = 4; \qquad x_2 = 3;$$

így
$$y = \frac{x+2}{(x-4)(x-3)}.$$

Ezek szerint az $x = -2$ helyen zérushely, az $x = 4$ és $x = 3$ helyen egyszeres pólus (páratlan rendű) van.

b) Az $x = -2$ helyen a függvény negatív értékekből pozitív értékekbe megy át. Ha ugyanis $x < -2$, akkor a számláló negatív, a nevező mindkét tényezője úgyszintén, s így a tört értéke is. Ha viszont $x > -2$, akkor a számláló jelet vált, a többi tényező viszont nem (hiszen azoknak nem volt közben 0 helyük), és így az egész tört is jelet vált.

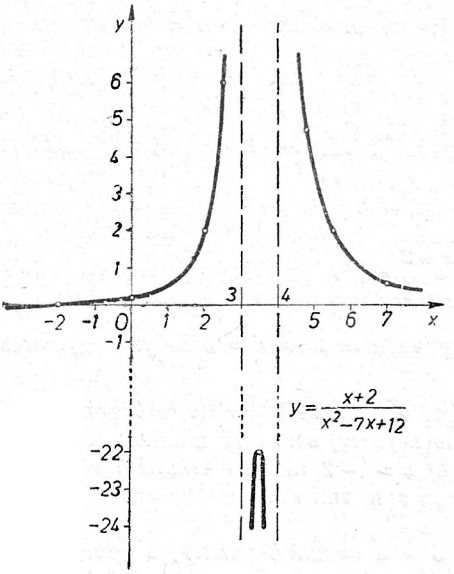
Az $x = 3$ hely «előtt» – azaz, ha $x < 3$ – a számláló pozitív, a nevező első és második tényezője is negatív, a tört tehát pozitív. Erről az oldalról közeledve tehát a pólushoz, a tört értéke minden határon túl nő. A másik oldalról közelítve viszont ($x > 3$) minden határon túl csökken a tört, hiszen közben csak egyetlen tényező [az $x-3$)] vette fel a 0 értéket – de jelet is váltott, mert páratlan kitevőjű tényező. Ugyancsak minden határon túl csökken a tört értéke, ha az $x < 4$ oldalról közelítünk az $x = 4$ helyhez, hiszen közben egyetlen tényező sem váltott előjelet. Ha viszont az $x > 4$ oldalról közelítjük a pólust, minden határon túl nő a tört értéke.

c) Valódi törtfüggvényről lévén szó, ennek egyetlen «vízszintes» aszimptotája van, éspedig az x tengely. Ezt úgy lehet belátni – s ez a módszer általános érvényű – hogy számlálóból és nevezőből kiemeljük x legmagasabb hatványát, s ebben az alakban vizsgáljuk, mi történik, ha $|x| \to \infty$.

$$= \frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}.$$

Elég nagyra választva x abszolút értékét, a második tényező tetszés szerint kevéssé különbözik az $\dfrac{1}{1}$ értéktől; az első tényező pedig a 0-tól. A tört tehát mindkét irányban az $y = 0$ egyeneshez aszimptotizál.

Éspedig, ha $x \to -\infty$ (azaz $x < 0$), akkor az $\dfrac{1}{x}$ tényező – s vele együtt a szorzat is – negatív értékeken át tart a 0-hoz, tekintettel arra, hogy a második tényező elég kicsiny x-értékeknél bizonyosan pozitív, $+1$ közelében levő szám.



66. ábra

Ha viszont $x \to \infty$, akkor a tört a pozitív félsíkról közeledik az x-tengelyhez. (L. a 66. ábrát!)

2. $$y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x + 2}.$$

Megoldás:

a) Áltörttel van dolgunk, amit osztással át kell alakítanunk az aszimptotikus viselkedés vizsgálata céljából. A zérushelyek megállapítására azonban fenti alak kedvezőbb.

Zérushelyek az $x_1 = 4$ és $x_2 = 3$ helyen vannak, mert az $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenletnek ezek a gyökei.

Szétbontva osztással, egész és tört részére kapjuk, hogy

$$y = \frac{x^2 - 7x + 12}{x + 2} = x - 9 + \frac{30}{x + 2}.$$

A függvénynek az $x_3 = -2$ helyen van — éspedig ismét páratlan rendű — pólusa.

b) Az előző vizsgálatok alapján könnyen beláthatjuk, hogy az $x_1 = 4$ helyen a függvény negatív értékekből pozitívakba, az $x_2 = 3$ helyen pedig pozitívakból negatívokba megy át. Az $x_3 = -2$ hely előtt a függvényértékek negatívok, tehát erről az oldalról közeledve minden határon túl csökken, ellenkező oldalról közeledve minden határon túl nő a függvényérték.

c) A valódi törtrész:

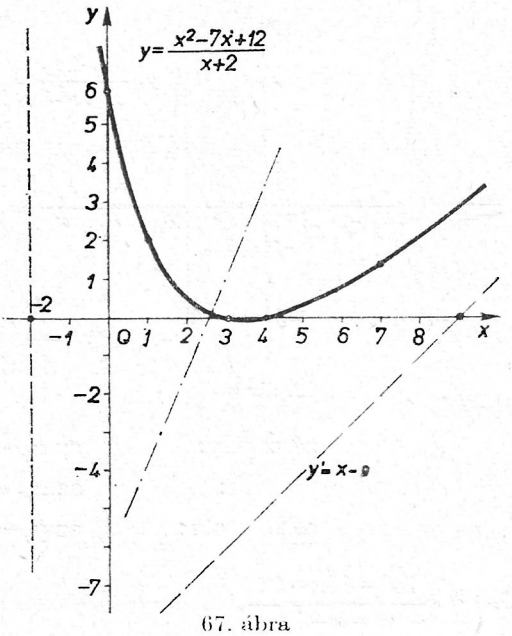
$$\frac{30}{x+2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{30}{1 + \frac{2}{x}}$$

minden határon túl csökkenő abszolút értékű, ha $|x| \to \infty$. Éspedig negatív értékeken át tart a 0-hoz, ha $x \to -\infty$, pozitív értékeken át, ha $x \to +\infty$. A görbe viselkedését tehát az egész rész: $x - 9$ értékei fogják elég nagy x értékeknél meghatározni. Ehhez az egyeneshez simul — aszimptotizál — a görbe. Éspedig «alulról» simul hozzá, ha $x \to -\infty$ (ekkor ugyanis a második tag, a törtrész egyre csökkenő abszolút értékű negatív járuléka adódik hozzá az egész részhez); $x \to +\infty$ esetben viszont «felülről» simul hozzá, mert ekkor a törtrész járuléka pozitív. L. a 67. ábrát!

3. $$y = \frac{(x+3)(x-2)^2}{(3x^2 - 15x + 12)(x-3)^2} = \frac{(x+3)(x-2)^2}{3(x-4)(x-1)(x-3)^2}.$$

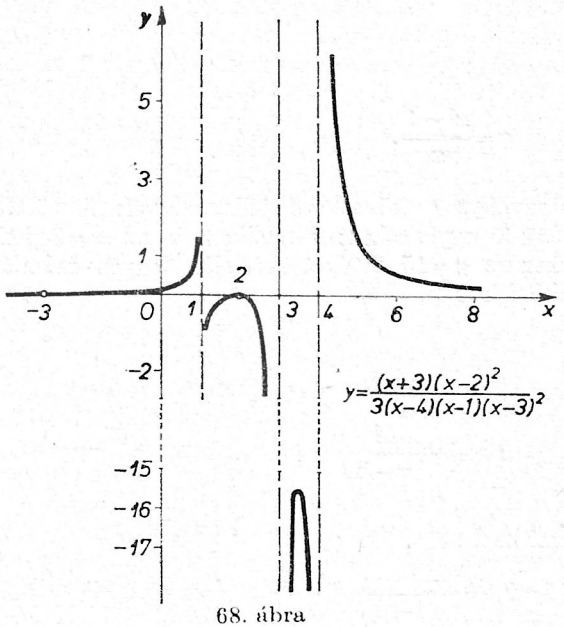
Megoldás:

a) Ennél a függvénynél csak az $x_1 = 2$ hely – a kétszeres zérushely – és az $x_2 = 3$ hely – a kétszeres, páros rendű pólus – környezetében végezzük el a vizsgálatot, a többit az olvasóra bízzuk. Közvetlenül az $x_1 = 2$ hely «előtt» – amikor tehát $x < 2$ –, a tört negatív értékeket vesz fel. A számlálónak ugyanis mindkét tényezője pozitív, a nevező négyzetes tényezője is; a nevező másik két tényezője közül viszont az egyik negatív, a másik pozitív. Elérkezve az $x = 2$ helyre, a számláló $(x-2)^2$ tényezője felveszi ugyan a 0 értéket, de túlhaladva a helyen, nem vált előjelet, mert másodfokú. A többi tényező szintén nem változtatja előjelét, mert ahhoz közben a 0 értéket is fel kellene vennie, ami a 2 hely elég kis környezetében nem következik be. Nem vált előjelet tehát a tört sem. A görbe ezek szerint az $x_1 = 2$ helyen «alulról» érinti az x-tengelyt.



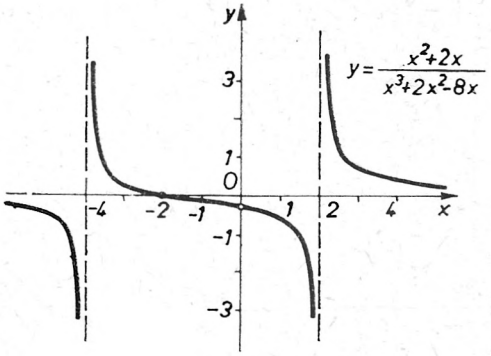
67. ábra

Az $x_2 = 3$ helytől «balra» – azaz ha $2 < x < 2$ – a tört értéke negatív. Közeledve a pólushoz, a tört értéke ennélfogva minden határon túl csökken. A másik oldalról közeledve a pólushoz – azaz $3 < x < 4$ esetén – ugyancsak minden határon túl csökken a tört értéke. Az $x = 3$ helynek ebben a környezetében ugyanis csak az $(x-3)^2$ tényező vette fel a 0 értéket, tehát egyedül ez válthatott volna előjelet. Páros kitevőjű lévén azonban, nem változtatta meg előjelét, ennek következtében tehát a tört is marad negatív. (L. a 68. ábrát.)



68. ábra

Vizsgálandók zérushely, pólus, megszüntethető szingularitás és aszimptóta szempontjából az alábbi racionális törtfüggvények:



69. ábra

$$y=\frac{x^2+2x}{x^3+2x^2-8x};$$

Megoldás: (Lásd a 69. ábrát)

Átalakítva gyöktényezős alakba:

$$y=\frac{x(x+2)}{x(x^2+2x-8)}=\frac{x(x+2)}{x(x+4)\,(x-2)}$$

Ezek szerint megszüntethető a szingularitás az: $x_1=0$ helyen; itt $y\to-\frac{1}{4}$

zérushely: az $x_0=-2$ helyen,

pólusok: az $x_{p1}=-4$; $x_{p2}=2$ helyeken,

aszimptota: az $y_a=$ egyenes (az x-tengely).

5. $y=\dfrac{2x^2-10x+12}{x^2-x-12}$.

6. $y=\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2+5x+6}$.

7. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$.

8. $y=\dfrac{(3x-2)\,(x+3)\,(4x-3)}{10(x+2)\,(x-1)}$.

9. $$y=\frac{x^3-1}{x}.$$

10. Képezzünk racionális törtfüggvényt a következő jellemzőkkel: A törtfüggvény aszimptotizáljon az $y_a=2x+3$ egyeneshez; rendelkezzék az $x=3$ helyen elsőrendű pólussal, az $x=1$ helyhez az $y=15$ értéket rendelje, legyen számlálója és nevezője a lehető legalacsonyabb fokú!

Megoldás:

a) A függvény

$$y=2x+3+\frac{A}{x-3}$$

alakú kell legyen.

A a harmadik feltételből számítható:

$$y(1)=15=2+3+\frac{A}{1-3}=5-\frac{A}{2}.$$

Ebből: $A = -20$. Tehát végül:

$$y = 2x+3-\frac{20}{x-3} = \frac{2x^2-3x-29}{x-3}.$$

Írjuk fel annak a legegyszerűbb racionális törtfüggvénynek az egyenletét, amely a következő feltételeket elégíti ki:

11. Az x-tengely legyen a vízszintes aszimptota, zérushelyek legyenek: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$, pólushelyek: $x_3 = 3$ (másodrendű pólus); $x_4 = 4$; az előírt függvényérték $y(5) = 0$.

12. Aszimptotizáljon az $y_2 = x^2-2x+5$ parabolához, legyen pólusa az $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ helyen; előírt függvényérték $y(0) = 3$.

13. Vizsgáljuk a valóságos gázok van der Waals-féle állapotegyenletét mint racionális törtfüggvényt, és ábrázoljuk!

$$p = \frac{R \cdot T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \qquad (a, b > 0;\ RT = \text{állandó})$$

Megoldás:

Legyen

$$p = p_1+p_2, \qquad \text{ahol} \qquad p_1 = \frac{R \cdot T}{v-b}; \qquad p_2 = -\frac{a}{v^2}$$

Ábrázoljuk külön-külön e függvényeket, majd szuperponáljuk őket! $v = b$-nél elsőrendű pólus, $v = 0$-nál másodrendű pólus van. Fizikai szempontból csak a $v > b$ ág fontos. (Az eredménytárban szereplő ábrában csak ezt ábrázoltuk!)

Figyeljük meg az eredménytár ábráján, hogy valamely gáz esetén (azaz amikor az a és b anyagállandók már rögzítettek, mert azok csak a gáz kémiai jellemzőitől függenek első közelítésben) a T hőmérséklet különböző értékeihez különböző jellegű $p = p(v)$ görbék tartoznak. Azon T értékek, amelyekhez tartozó görbéket valamennyi a v tengellyel párhuzamos egyenes csak egy pontban metszi, az ún. T_k «kritikus hőmérséklet» felett vannak; azon T értékek viszont, amelyekhez tartozó görbéket a v-tengellyel párhuzamos egyenesek egy serege 3 pontban metsz, a T_k kritikus hőmérséklet alatt vannak.

7. §. IRRACIONÁLIS FÜGGVÉNYEK

Mindazon függvénykapcsolatok, amelyekben a független változót is tartalmazó tagok vagy tényezők között törtkitevőjű kifejezések előfordulnak, a függő változóra kifejtett alakban (ilyen szempontból az állandók törtkitevős hatványai természetesen nem jönnek számításba) *irracionálisak*. Közülük *legegyszerűbbek* az $y = x^a$ alakú függvények (ahol a pozitív vagy negatív *racionális* törtszám). Az irracionális függvények vizsgálatát ilyenekre *vissza tudjuk vezetni* eltolás, nyújtás és szuperpozíciók segítségével. Lényeges tudni, hogy páros gyökkitevő előfordulása esetén az *értelmezési tartomány* azon x-értékek halmaza, amelyeknél a gyök alatti kifejezés 0 vagy annál nagyobb értékű. Az irracionális függvények *általában többértékűek*, azaz ugyanahhoz a helyhez esetleg több függvényérték is tartozik.

Feladatok:

1. Ábrázoljuk a görbe jellegének megismerése céljából az $y = x^{\frac{p}{q}}$ alakú függvények seregéből a következő, egymástól elütő tulajdonságú görbéket (egy ábrában) csak a jelleget kidomborítva, feltételezve, hogy a $\frac{p}{q}$ törtet tovább már nem lehet egyszerűsíteni.

a) $0 < \frac{p}{q} < 1$ q páratlan, p páratlan,

b) $0 < \frac{p}{q} < 1$ q páratlan, p páros,

c) $0 < \frac{p}{q} < 1$ q páros, p páratlan,

d) $1 < \frac{p}{q}$ q páratlan, p páratlan,

e) $1 < \frac{p}{q}$ q páratlan, p páros,

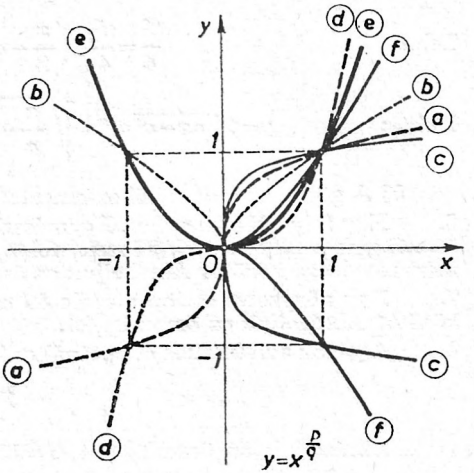
f) $1 < \frac{p}{q}$ q páros, p páratlan.

Megoldás:

1. Ha q páros, p bizonyára páratlan, mert feltételeink értelmében a $\frac{p}{q}$ tört tovább már nem egyszerűsíthető. Ennek következtében páros q esetén az értelmezési tartomány x pozitív értékeinek összessége — a pozitív félabszcisszatengely. Itt azonban a függvény kétértékű a páros gyökkitevő következtében.

2. Vizsgáljuk egyelőre az $x > 0$ esetben a görbéket; ha kétértékűek, csak a pozitív gyököt véve figyelembe: $\frac{p}{q} > 1$ esetében a görbe az $y = x$ egyenes felett jár az $x > 1$ intervallumban, az $x < 1$ intervallumban pedig alatta. Épp fordítva van ez a $\frac{p}{q} < 1$ esetben. Ekkor a görbe az $x < 1$ intervallumban jár a szögfelező felett, $x > 1$ esetben pedig alatta. Egynél kisebb abszolút értékű számok ugyanis növekvő kitevő esetén csökkenő abszolút értékű hatványmennyiséget, egynél nagyobb számok viszont növekvő abszolút értékű hatványmennyiséget adnak. Sőt az utolsó (10. §) alfejezetben azt is ki fogjuk mutatni, hogy az $x = 0$ hely elegendően kis környezetében a görbék bármilyen $y = cx$ egyenes «felett» járnak $\frac{p}{q} < 1$ és $x > 0$ esetben, viszont bármilyen $y = dx$ egyenes «alatt» $\frac{p}{q} > 1$ és $x > 0$ esetben. Ez más szóval annyit jelent, hogy $\frac{p}{q} < 1$ esetben függőleges, $\frac{p}{q} > 1$ esetben vízszintes érintővel futnak be a görbék az origóba.

3. Az eddig elmondottak alapján páratlan q esetén az $x<0$ esetre is meg tudjuk szerkeszteni a görbét az y-tengelyre vagy az origóra történő tükrözéssel, attól függően, hogy p páros vagy páratlan. Az első esetben ugyanis a függvény maga is páros, ill. páratlan a másodikban. Páros q esetén viszont a másik (a negatív előjelű) gyöknek megfelelő görbeágat tudjuk szerkeszteni az x-tengelyen történő tükrözéssel.



70. ábra

4. Valamennyi görbe átmegy az $x=1$; $y=1$ ponton.

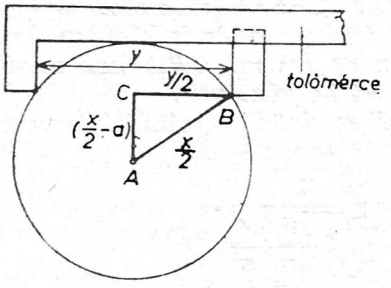
2. Ábrázoljuk az $y=x^{\frac{p}{q}}$ görbéket jellegükre figyelve csak, ugyanazokban az esetekben, mint az 1. feladatban, csakhogy negatív $\frac{p}{q}$ törtekre.

Megoldás:

a) A szerkesztést az előbbi ábra alapján végezhetjük, minden ordináta helyett a reciprokot véve. Az $x=0$ helyen egyetlen görbe sincs értelmezve, valamennyinek «függőleges aszimptotája» van. (Tört kitevő esetén azonban ezt a helyet nem pólusnak hívjuk!)

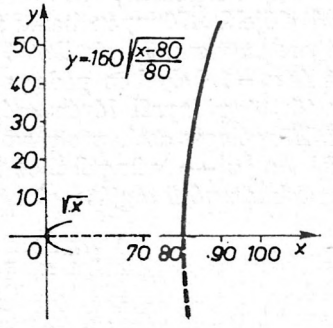
3. Vizsgáljuk (és esetleg ábrázoljuk) az $y=(5-3x)^{\frac{p}{q}}$ görbéket ugyanazon $\frac{p}{q}$ értékek esetén, mint az első, ill. második feladatban, eltolás és nyújtás segítségével származtatva őket!

4. Adott átmérőjű derékszögű háromszög esetén ($c=2{,}5$) ábrázoljuk az összefüggést a két befogó hossza között.



a

71. ábra



b

5. Tolómércével, amelynek «*a*» mérete (71. ábra) ismert ($a=80$ mm), körhenger alakú ún. gömbvas átmérőjét akarjuk mérni, amely azonban nagyobb $2a$-nál. Így közvetlenül ezt nem mérhetjük, csakis az ábrán bejelölt távolságot, y-t. Mi az összefüggés y és a gömbvas x átmérője között? Ábrázoljuk az összefüggést.

Megoldás:

a) Az ábrából kiolvasható, hogy ABC derékszögű háromszög átfogója $\frac{x}{2}$, egyik befogója $\frac{y}{2}$, a másik $\left(\frac{x}{2}-a\right)$.

Tehát $$\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{4}+\left(\frac{x}{2}-a\right)^2=\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}-ax+a^2.$$

Ebből: $$y=2\sqrt{ax-a^2}=2a\sqrt{\frac{x}{a}-1}=160\sqrt{\frac{x}{80}-1}\approx 17{,}9\sqrt{x-80}.$$

b) A görbe az $y=\sqrt{x}$-ből származtatható.

6. Egy folyó 120 m széles. Egymással szemben mindkét parton egy-egy fa áll. Mi az összefüggés a (egyenesnek képzelt) folyópart egy tetszés szerinti pontjának a két fától mért távolsága között? Ábrázoljuk az összefüggést.

7. Egy négyzetes oszlop alapéle 40 cm. Mi az összefüggés a magasság és a testátló között? Ábrázoljuk az összefüggést.

8. A gázok adiabatikus állapotváltozásánál a nyomás és térfogat közötti összefüggés:

$$pv^{\varkappa}=C.$$

Ábrázoljuk az összefüggést $C=10$; $\varkappa=\frac{8}{5}$ értékek esetén.

9. Ábrázoljuk az $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ függvényt vázlatosan.

Megoldás:

a) Az $x^2-5x+4=0$ egyenletnek két gyöke az $x_1=4$ és $x_2=1$. Ennélfogva

$$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$$

A függvény értelmezési tartománya mindazon x-értékek halmaza, ahol a gyökjel alatti kifejezés pozitív, azaz ahol a tényezőkre kifejtett alakban mindkét tényező egyező előjelű. Könnyen beláthatjuk, hogy $x>4$ esetén mindkét tényező pozitív, $x<1$ esetén viszont mindkettő negatív. Az $1<x<4$ szakaszon a gyök, az $x_1=4$ és $x_2=1$ helyeken pedig a tört nincs értelmezve. Az is könnyen belátható, hogy törtfüggvényről lévén szó, elsősorban az aszimptotákat kell megállapítanunk. Függőleges aszimptota az $x_1=4$ és $x_2=1$ helyeken van.

b) Az $|x|\to\infty$ vizsgálathoz ismét ki kell emelnünk a számláló és nevező legmagasabb kitevőjű tagját:

$$y=\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}}.$$

A kétértékűség miatt tehát két vízszintes aszimptotánk van: az $y=+1$ és $y=-1$ egyenesek.

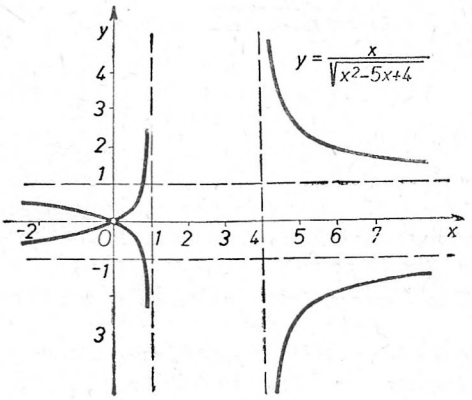
Ezek alapján az ábra jellegére már elegendő ismeretünk van. Hozzá lehet még tennünk, hogy az $x=0$ helyen 0-helye van a törtnek, s itt előjelet vált. Több előjelváltása egyik ágnak sincs.

c) Egy-két további pont megállapítása után a görbét könnyen felrajzolhatjuk: (L. a 72. ábrát!)

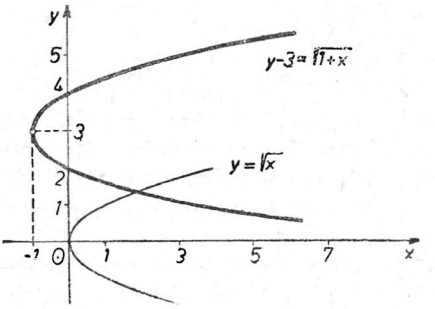
10. Ábrázoljuk az $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ függvény azon ágát, ahol a gyökös kifejezés pozitív értékét vesszük figyelembe.

11. Ábrázoljuk az $y = \sqrt[3]{1+x^2}$ függvényt.

12. Ábrázoljuk az $y^2 - 6y - x + 8 = 0$ függvényt transzformáció segítségével az $y = \sqrt{x}$ függvénygörbét felhasználva



72. ábra



73. ábra

Megoldás:

a) Implicit függvénykapcsolatot kell ábrázolnunk. Ilyenkor mindig meg kell kísérelnünk a függő változó kifejezését. Közvetlenül nyilván sokkal egyszerűbb volna x-et kifejezni az egyenletből, és az $x = f(y)$ függvénykapcsolatot ábrázolni, amely másodfokú parabolának felel meg — a koordinátarendszert úgy forgatva, hogy az y-tengely essék a szokásos x-tengely helyére és viszont.

Gyakran — különösen, ha y-t nem is tudjuk a függvénykapcsolatból kifejezni, x-et azonban igen — ezt az utat szoktuk követni. Mostani feladatunk azonban a bemutatott módot kívánja meg, hiszen az $y = \sqrt{x}$ függvényt kell felhasználnunk!

A kapcsolat a függő változóra, y-ra másodfokú, amelyből a másodfokú egyenletekre vonatkozó gyökképlet alapján y kifejezhető:

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(8-x)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32 + 4x}}{2} = 3 \pm \sqrt{1+x}.$$

Hogy a függvényt az $y = \sqrt{x}$-ből származtathassuk, kissé átírjuk:

$$y - 3 = \sqrt{1+x}.$$

A görbe tehát az $y = \sqrt{x}$ görbéből az y-tengely irányában 3, az x-tengely irányában pedig (-1) egységnyi eltolással származik.

b) Értelmezési tartomány: az $x > -1$ félegyenes, értékkészlet: valamennyi valós szám. (L. 73. ábrát!)

HARMADIK RÉSZ

TRANSZCENDENS FÜGGVÉNYEK

Az eddig megismert elemi függvényeket, az ún. algebrai függvényeket az jellemezte, hogy a független változónak bármelyik – az értelmezési tartományba eső – értékéhez véges számú algebrai művelet elvégzése után meg tudtuk határozni teljes pontossággal a függvényértéket (ha ti. az irracionális számokat is felhasználhatjuk a függvényérték megadásához. Tizedes törttel ui. pl. $\sqrt{2}$ sem adható meg pontosan!).

A most ismertetendő ún. **transzcendens** (elemi) **függvényeknél** más a helyzet. Elsősorban is az értelmezési tartomány helyeihez – néhány kivételtől eltekintve – *véges számú algebrai műveletei nem tudjuk meghatározni a függvényértékeket;* ezeket vagy táblázat segítségével, vagy pedig a későbbiekben ismertetendő infinitezimális számítás segítségével tudjuk csak – bizonyos, a feladat megkívánta pontossággal – megállapítani. Másrészről *a függvényekre vonatkozó különböző összefüggések elemi algebrai módszerekkel csak ritkán vezethetők le.*

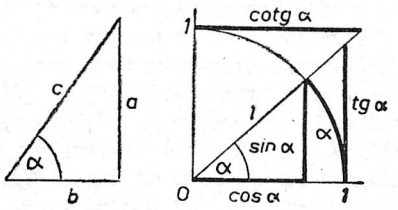
A *transzcendens függvények* «**ismerete**» tulajdonképpen annyit jelent, hogy egyrészről függvénytáblázat és az *A. VI.* fejezetben részletesen ismertetendő eljárások segítségével bármilyen – előre adott – pontossággal *kiszámíthatjuk* az egyes *függvényértékeket;* másrészről azt jelenti, hogy az egyes függvények között fennálló **kapcsolatok** nagy részét jól **ismerjük** *és* **használni** is **tudjuk.** Ennek következtében ugyanis a közöttük kijelölt műveleteket, operációkat akkor is el tudjuk végezni, ha a helyet konkréten nem ismerjük – azaz a függvényekkel valóban mint függvényekkel tudunk bánni, nem pusztán csak akkor, mikor már a numerikus előírások is adottak.

Közülük két csoportot szintén az elemi függvények körébe tartozónak mondunk, éspedig azért, mert a közöttük fennálló összefüggések viszonylag könnyűek, másrészről, mert *egyszerű geometriai, ill. algebrai definíciók* segítségével is jellemezni tudjuk őket. Ebben a fejezetben csak ezzel a két csoporttal foglalkozunk. Mégegyszer hangsúlyozni szeretnők, hogy »*ismeretük*« *nem csupán azt jelenti, hogy definíciójukat ismerjük és a részükre adott táblázatot használni tudjuk, hanem nemkevésbé azt is, hogy jól ismerjük a közöttük fennálló összefüggések döntő részét.* Ezeket tehát szintén jól be kell gyakorolnunk.

8. §. TRIGONOMETRIKUS ÉS ARCUSFÜGGVÉNYEK

a) Trigonometrikus függvények

α) Definíciók. *Kétféleképp szokás definiálni a trigonometrikus függvényeket* — vagy szögfüggvényeket. Utóbbi elnevezésük épp az egyik — kevésbé általános — definícióból származik. *Derékszögű háromszögeknél* ugyanis — a 90°-os szögön kívül — egy-egy szög egyenlősége már biztosítja két háromszög hasonlóságát. Ennek közvetlen következménye, hogy az ilyen háromszögekben a megfelelő oldalak aránya állandó, tehát független az egyes — egymáshoz hasonló — háromszögek méretétől. Csakis a szög változtatásával változtatható tehát, azaz *kizárólag a szög függvénye.* Ennélfogva mindegyik szögfüggvénynél a szög a független változó — a függő változó pedig különböző aszerint, hogy melyik *két* oldal viszonyát tekintjük.[1]



74. a), b) ábra

Az α szög sinusa ezek alapján az α hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög α-val szemben fekvő befogójának és az átfogónak a viszonya. A szokásos jelölésekkel: L. a 74. *a)* ábrát!

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Az α szög cosinusa az α szög melletti befogó és az átfogó viszonya:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Az α szög tangense az α-val szemben fekvő és a mellette fekvő befogó hányadosa:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}.$$

Az α szög cotangense a szög tangensének reciprokja, azaz az α melletti és a szemközti oldal hányadosa:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{b}{a}.$$

Ezekkel a definíciókkal azonban csak hegyesszögek szögfüggvényeit tudjuk megadni. A definíciót úgy általánosítjuk, hogy hegyesszögekre a régi és új definíciói azonosak legyenek.

[1] Ezzel kapcsolatban egyszer s mindenkorra jegyezzük meg, hogy a **matematikában a szög mértékszámát** — különösen ha függvényeiről van szó — **radiánokban adjuk meg.** A gyakorlati mérőeszközök ezzel szemben — ennek következtében a függvénytáblázatok döntő része is — *fokokban* adják meg a szög nagyságát, ezért jól kell ismernünk *az átszámítást*; *ez végeredményben egyszerű hármasszabály.*

E célra *egységsugarú kört* használunk, melynek »vízszintes« (ez az az átmérő amelyet x-tengelynek szoktunk választani) átmérőjén pozitív irányt választunk és beosztással látjuk el – azaz számegyenest készítünk belőle; hasonlóképp járunk el a rá merőleges »függőleges« tengellyel. Felveszünk valahol egy kerületi pontot és összekötjük a kör középpontjával. Ezen összekötő egyenesnek a »vízszintes« számegyenes pozitív irányával bezárt szögét tekintjük a felvett kerületi ponthoz rendelt α szögnek. Megjegyzendő, hogy a radiánban mért α szög és a hozzátartozó (sugárnyi hosszegységben mért) ívdarab (arcus) mérőszáma azonos. Az arcust az x-tengelytől pozitív értelemben mérjük. Nyilván alkalmas szögmérésre. Meghatározzuk az α arcusú kerületi pont előjeles távolságát a »vízszintes« és »függőleges« tengelytől, azaz e pont ordinátáját és abszcisszáját. *Az α arcusú pont abszcisszáját tekintjük as α szög cosinusának, ordinátáját pedig az α sinusának. A sinus- és cosinusértékek hányadosát definiáljuk az α szög tangenseként.* Ilyen értelemben az α, a $\sin\alpha$, a $\cos\alpha$ stb. az egységkör egy ívdarabjának, illetve vele kapcsolatos egyenesdaraboknak előjeles hosszúsági mérőszámai! L. a 74. *b)* ábrát!

Ennek alapján írtuk fel a következő egyenlőségeket, melyek segítségével $\frac{\pi}{2}$-nél nagyobb szögek szögfüggvényeit is kiszámíthatjuk. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az itt közölt képletek akkor is érvényesek, ha a bennük szereplő α szög nem hegyesszög.

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(-\alpha); \qquad \cos(2\pi-\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\alpha);$$

$$\sin(2k\pi+\alpha) = \sin\alpha; \qquad \operatorname{tg}(2k\pi+\alpha) = \operatorname{tg}(k\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\cos(2k\pi+\alpha) = \cos\alpha;$$

itt k egész szám ($k = 0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots$).

Ezekből a képletekből egyben az is kiderül, hogy a sinus- és tangensfüggvény páratlan, a cosinus páros függvény, továbbá a sinus és cosinus 2π periódusú, a tangens π periódusú függvény.

3) **Alapösszefüggések.** A következő nagy fontosságú összefüggéseket kell jól ismernünk:

1. Pótösszefüggések:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Ezen összefüggéseket különösen ki kell emelnünk. Legtöbb szögfüggvénytáblázat és sok logarléc csak $\frac{\pi}{4}$ argumentumig tartalmazza a szögfüggvényeket. Ezen és előbbi összefüggések segítségével viszont valamennyi szögfüggvényt $\frac{\pi}{4}$-nél kisebb szögek szögfüggvényeire tudjuk visszavezetni!

2. Pythagorasi összefüggések:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

3. Összegképletek:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta.^*$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

4. Az ebből következő kétszeres és félszögképletek:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha. \qquad \sin\alpha=2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad \cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

* A ± jel jelentése ilyen jellegű egyenlőségekben: az egyenlőség (azonosság) fennáll, ha mindkét oldalon csak a felső agy mindkét oldalon csak az alsó *műveleti jelet* vesszük figyelembe; de nem áll fenn, ha egyik oldalon az alsó, másikon a felső jelet tartjuk meg!!

5. Szorzatképletek:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

Illetve speciálisan $\alpha = \beta$ választásnál:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}[1-\cos 2\alpha].$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}[1+\cos 2\alpha].$$

6. Függvényösszeg-képletek:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

γ) **Geometriai és mechanikai alkalmazások** (lásd a példáknál).

δ) **Rezgéstani alkalmazások** (lásd a példáknál).

b) A trigonometrikus függvények inverzei

A trigonometrikus függvények inverzei az ún. arcusfüggvények; az arcus sinus, az arcus cosinus, az arcus tangens, és arcus cotangens; jelekben: arc sin, arc cos, arc tg, illetve arc ctg függvények.

α) **Definíciók.** Az $y = \sin x$ függvény inverze az $y = \text{arc sin } x$ függvény; jelenti azt a radiánban, illetve arcus-szal mért szöget, melynek sinusa az adott x érték.

Az $y = \cos x$ függvény inverze az $y = \text{arc cos } x$ függvény; jelenti azt a radiánban, illetve arcusszal mért szöget, amelynek cosinusa az adott x érték.

Az $y = \text{tg } x$ függvény inverze az $y = \text{arc tg } x$ függvény: azt a szöget jelenti, amelynek tangense az adott x érték.

Az $y = \text{ctg } x$ függvény inverze az $y = \text{arc ctg } x$ függvény; azt a szöget jelenti, amelynek cotangense az adott x érték.

Ezen függvények igen *sok tévedésre adnak alkalmat*, még a gyakorlottabbak körében is. Ezeket azonban el lehet kerülni, ha két dolgot alaposan az emlékezetünkbe vésünk.

Sohase felejtsük el, hogy *a trigonometrikus függvények argumentuma* (az a változó, amelynek sinusát stb. keressük) *szög, amelynek mérése különböző egységekben és módon történhet.* Itt tehát van helye az átszámításnak (a radián, fok, újfok, arcus, vonás stb. között).[1] *Ezzel szemben a függvényérték* (a megtalált sinus stb. érték) *viszonyszám;* pl. a derékszögű háromszög két oldalának a viszonya, vagy pl. egy körpont ordinátájának viszonya a sugárhoz stb. Nyilvánvaló tehát, hogy nem számítható át semmilyen más egységre.

Ennek megfelelően az arcusfüggvények argumentuma (az a változó, amelynek arc sin-át stb. keressük) viszonyszám, tehát át nem számítható semmilyen más egységre. Ezzel szemben a kapott eredmény: szög, amelyet átszámíthatunk fokokra, illetve radiánokra stb.[1]

Gyakori hiba ugyanis, hogy a következő kérdésre: mennyivel egyenlő arc sin 0,7, így kezdünk válaszolni: 0,7-et át kell számítani fokokra, hogy stb. Sohase felejtsük el, hogy *aminek az arc sin-át vagy arc cos-át stb. keressük, az semmiféle módon át nem számítható, ezzel szemben a kapott eredmény már igen.*[1]

A másik gyakori hiba, hogy az arcusnak és az utána következő jelzőnek külön értelmet tulajdonítanak (külön is olvassák). Ezt legkönnyebben úgy tudjuk elkerülni, »ha lefordítjuk magunknak magyarra« a függvényelnevezéseket, és ezt, mielőtt számolni kezdenénk, felidézzük.

Az arc sin szócska »magyar fordítása«: melyik az a szög, amely*nek* a sinusa . . . ?

Hasonlóképpen az arc cos-é: melyik az a szög, amely*nek* cosinusa . . . ?

Különösen ki szeretnők hangsúlyozni a kiemelt birtokosjelet: ha ezt megjegyezzük, nem fogunk tévedni.

Az arcusfüggvények, tekintettel a trigonometrikus függvények periodicitására, többértékű, éspedig végtelen sok értékű függvények. Azonban egyetlen függvényérték ismeretében a többit már mechanikusan képezni tudjuk.

Ezért az értéktartomány valamely szakaszát mindegyik függvénynél kiválasztjuk (éspedig egy olyan szakaszát), amelyből minden szóba jöhető – értelmezési tartománybeli – független változó értékhez egy és csakis egy (azaz egy bizonyosan, de egynél több semmi esetre sem) érték tartozik. Ezt az értéket hívjuk az illető *arcusfüggvény főértékének;* szokásos jelölés szerint, ha a főérték után érdeklődünk, az arcusfüggvényt *(nagy) A betűvel írjuk:* pl. Arc cos x stb. az a függvény, melynél bármely x értékhez egyetlen olyan szög (főérték) tartozik, amelynek cosinusa éppen x.

Az $y = \arcsin x$ függvény értelmezési tartománya nyilvánvalóan a $-1 \leqq x \leqq 1$ zárt tartomány (ti. nincs olyan szög, amelynek sinusa nagyobb lenne 1-nél, illetve kisebb -1-nél).

Értékkészletéből a $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ zárt tartományba esők jelentik a főértéket.

Tekintettel arra, hogy $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, ebből következően az egyik (ún. fő) mellékértéket úgy kapjuk, hogy a főértéket π-ből kivonjuk. Az összes többi mel-

[1] Bár a matematikában mindig a radiánt használjuk, amely maga is két hosszúság (ti. az ív és a sugár) viszonya!

lékértéket úgy kapjuk, hogy a főértékhez, illete a fő mellékértékhez a 2π egész számú többszöröseit adjuk hozzá, illetve vonjuk ki.

Ezek szerint, ha $y = \operatorname{Arc\,sin} x$, ahol $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ (definíció szerint), akkor az $\operatorname{arc\,sin} x = y^*$ jelöléssel: $y_1^* = y$; $y_2^* = (\pi - y)$; $y_{3,k}^* = y + 2k\pi$; és $y_{4,n}^* = (\pi - y) + 2n\pi$ (k és $n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) jelentik y^* összes értékét.

Hasonlóképp az $y = \operatorname{arc\,cos} x$ függvény értelmezési tartománya a $-1 \leqq x \leqq 1$ zárt tartomány. Főértékkészlete a $0 \leqq y \leqq \pi$ zárt tartomány.

Ha $$y = \operatorname{Arc\,cos} x,$$

akkor $y^* = \operatorname{arc\,cos} x$, ahol

$$y_1^* = y; \quad y_2^* = -y; \quad y_{3,k}^* = y + 2k\pi; \quad y_{4,n}^* = (-y) + 2n\pi$$

az összes értékek.

Az $y = \operatorname{arc\,tg} x$ függvény értelmezési tartománya a $-\infty < x < \infty$ nyílt tartomány. Főértékkészlete a $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ nyilt intervallum.

Ezek szerint, ha $y = \operatorname{Arc\,tg} x$, akkor

$$y^* = \operatorname{arc\,tg} x; \quad \text{itt} \quad y_1^* = y; \quad y_{2,k}^* = y + k\pi,$$

(ahol $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$).

Hasonlóképp az $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ függvény értelmezési tartománya a $-\infty < x < \infty$ nyílt tartomány; főértékkészlete a $0 < x < \pi$ nyílt tartományból való.

β) **Ábrázolás, transzformáció** (lásd a példáknál).

γ) **Alapösszefüggések begyakorlása.** A következő három azonosságcsoporttal kell megismerkednünk: trigonometrikus függvények és inverzeik közti kapcsolatok; az arcusfüggvények egymással kapcsolatos összefüggései: az összegfüggvények.

Alapvetőek a következő azonosságok – amelyek az arcusfüggvények definícióiból azonnal következnek:

$$\begin{aligned} &\sin \operatorname{arc\,sin} \quad x = x \\ &\cos \operatorname{arc\,cos} \quad x = x \\ &\operatorname{tg} \operatorname{arc\,tg} \quad x = x \\ &\operatorname{ctg} \operatorname{arc\,ctg} \quad x = x \end{aligned}$$

$$\operatorname{arc\,sin} \sin x = \begin{cases} x \\ \pi - x \\ x + 2k\pi \\ (\pi - x) + 2n\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{arc\,cos} \cos x = \begin{cases} x \\ -x \\ x + 2k\pi \\ -x + 2n\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \operatorname{tg} x = \begin{cases} x \\ x + n\pi \end{cases}$$

$$\operatorname{arc\,cotg} \operatorname{ctg} x = \begin{cases} x \\ x + k\pi \end{cases} \quad (k \text{ és } n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots).$$

A kapcsolatok nagy részét feladat formájában ismerjük meg!

b) **Az arcusfüggvények néhány gyakorlati alkalmazása** (lásd a példáknál).

c) Trigonometrikus egyenletek

Így nevezzük azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen trigonometriai függvényei is szerepelnek. Közülük csakis azokat tudjuk megoldani, amelyekben az ismeretlen összes szereplő függvénye egyetlenegy segítségével kifejezhető. Ekkor első lépésként nem magára az ismeretlenre, hanem annak a kérdéses függvényére általában meg tudjuk oldani az egyenletet. Második lépésként, a kérdéses függvény inverzének segítségével, maga az ismeretlen számítható!

Feladatok:

8. § *a) α)*

Keressük ki az $y = \sin x$ függvény értékét a következő helyeken:

1. $x = 132°$.

Megoldás:

$$132° = 180° - 48°.$$

Ezek alapján:

$$\sin 132° = \sin (180° - 48°) = \sin 48° \cong 0{,}743.$$

Más gondolatmenet alapján:

$$\sin 132° = \sin (180° - 132°) = \sin 48° \cong 0{,}743.$$

2. $x = 198°$.

3. $x = 237°$.

4. $x = 320°$.

5. $x = 1{,}8$.

$$1{,}8 = \frac{1{,}8}{\pi}\, 180° \cong 103{,}2° = 103°12'; \quad \sin 1{,}8 = \sin 103°12' \cong 0{,}9735.$$

Más gondolatmenet alapján:

$$\sin 1{,}8 = \sin (\pi - 1{,}8) \cong \sin 1{,}3415.$$

$$1{,}3415 \cong \frac{1{,}3415}{\pi} \cdot 180° = 76{,}8°; \quad \sin 1{,}3415 \cong \sin 76{,}8° = \sin 76°48' \cong$$

$\cong 0{,}9735$.

6. $x = 3{,}6$.

7. $x = 4{,}21$.

8. $x = -0{,}3$.

Határozzuk meg a következő függvényértékeket:

9. $\cos x$ az $x = 1{,}8$ helyen.
10. $\operatorname{tg} \mu$ a $\mu = 278{,}4°$ helyen.
11. $\operatorname{ctg} \alpha$ az $\alpha = 137°27'$ helyen.
12. $\sin 2{,}3 - \cos 155°$.
13. $\cos 346° - \sin 4{,}2$.
14. $\operatorname{tg} 4{,}32 - \cos 1{,}95$.
15. $\operatorname{ctg} 224°35' - \sin 4{,}05$.

Határozzuk meg az alábbi függvények értékét a megadott helyeken:

16. $\operatorname{tg} \cos x$ az $x = 37°10'$ helyen.
17. $\cos(27° + \sin 0{,}8x)$ az $x = 0{,}8$ helyen.

18. Vezessük vissza az alábbi szögfüggvényeket $\frac{\pi}{4}$-nél kisebb argumentumú szögek függvényeire, és határozzuk meg így a függvényértéket:

$y = \sin(4{,}5x - 1{,}38)$ az $x = 3{,}6$ helyen,
$y = \cos(14{,}2x + 1{,}8)$ az $x = 2{,}72$ helyen,
$y = \operatorname{tg}(x + 3{,}4) - \cos 4{,}2x$ az $x = 0{,}83$ helyen,
$y = \operatorname{ctg}(4{,}32x - 0{,}1) + \sin(2x - 3)$ az $x = 1{,}8$ helyen.

Megoldás:

a) $\sin(4{,}5 \cdot 3{,}6 - 1{,}38) = \sin 14{,}82 = \sin(14{,}82 - 2\,2\pi) \cong \sin 2{,}25 =$

$$= \sin(\pi - 2{,}25) \cong \sin 0{,}8945 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0{,}8945\right) \cong$$

$\cong \cos 0{,}676 \cong \cos \cdot 38{,}72° \cong 0{,}7803$ stb.

19. $\cos(x^2 - \sin x)$ az $x = 1{,}2$ helyen.
20. $\operatorname{tg} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \operatorname{tg} x$ az $x = 0{,}2$ helyen.
21. $\operatorname{tg} \sin \operatorname{tg} \cos(2x - 27°)$ az $x = 0{,}4$ helyen.

Megoldás:

a) Az $y = \operatorname{tg} \sin \operatorname{tg} \cos(2x - 27°)$ tulajdonképpen összetett függvény. A következő egyszerű függvényekből lehetne felépíteni:

$$\begin{aligned} u &= 2x - 27°, \\ \cos u &= v, \\ \operatorname{tg} v &= w, \\ \sin w &= z, \\ \operatorname{tg} z &= y. \end{aligned}$$

(Fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy itt kifejezetten *összetett függvényekről* van szó, amit semmi esetre sem lehet szorzatnak gondolni, ezért *felesleges zárójelezni* a megadott képletben. A tg vagy sin jel ugyanis önmagában — ha nincs argumentuma, azaz nincs megadva a független változó, aminek meg kell pl. a tangensét határoznunk — értelmetlen. A legelső tg mögött álló kifejezés tehát nem lehet szorzó, csakis argumentuma a tangensnek! stb.).

b) Először is az u értéket határozzuk meg az adott x-ből, ebből v értékét és így tovább. Tekintettel azonban arra, hogy táblázataink a szögeket fokokban adják, a v, w, z változók pedig — mint egy másik változó szögfüggvényei — viszonyszámok, azaz ugyanolyan dimenziójúak, mint a radiánokban mért szög, át kell őket számítanunk fokokra.

Ugyanez a helyzet az x változóval, amely radiánokban adott, míg az u változóban szereplő másik tag fokokban mért. Összevonni pedig csak egynemű mennyiségeket szabad. Így:

$$u = 2 \cdot 0{,}4 \cdot \frac{180}{^{\circ}\pi} - 27^{\circ} \cong 45{,}8^{\circ} - 27^{\circ} = 18{,}8^{\circ},$$

$$v = \cos u \cong 0{,}9466,$$
$$w = \operatorname{tg} v \cong \operatorname{tg} 0{,}9466 \cong \operatorname{tg} 54{,}24^{\circ} \cong 1{,}395,$$
$$z = \sin w \cong 1{,}395 \cong \sin 79{,}82^{\circ} \cong 0{,}9843,$$
$$y = \operatorname{tg} z \cong \operatorname{tg} 0{,}9843 \cong \operatorname{tg} 56{,}45^{\circ} \cong 1{,}509.$$

Azaz: $y = f(0{,}4) \cong 1{,}509.$

22. Készítsünk értéktáblázatot az $y = \sin x; z = \cos x; u = \operatorname{tg} x; v = \operatorname{ctg} x$ függvényekről a következő helyeken:

$x = 0$ (itt a $v = \operatorname{ctg} x$ nincs definiálva); $x = 0{,}01$; $x = 0{,}02$; $x = 0{,}05$;
$x = 0{,}1$; $x = 0{,}2$; $x = 0{,}4$; $x = 0{,}5$; $x = 0{,}6$; $x = 0{,}8$; $x = 1{,}0$; $x = 1{,}2$;
$x = 1{,}3$; $x = 1{,}4$; $x = 1{,}45$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}52$; $x = 1{,}54$; $x = 1{,}56$; $x = 1{,}57$;
$x = \frac{\pi}{2}$ (itt az $u = \operatorname{tg} x$ függvény nem definiált).

Ábrázoljuk ennek alapján a négy függvényt az $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumban.

23. A 8. § *a) α)*-ban tanultak alapján folytassuk a táblázatot és az ábrát a $(\pi/2, 2\pi)$ intervallumra; majd a $(2\pi, 4\pi)$ intervallumra stb.

24. Figyeljük meg a függvények periodicitását, és adjuk meg mindegyikre a periódushosszt!

25. Ábrázoljuk az

$$y = 3 \cdot \sin\left(2 + \frac{x}{2}\right)$$

függvényt.

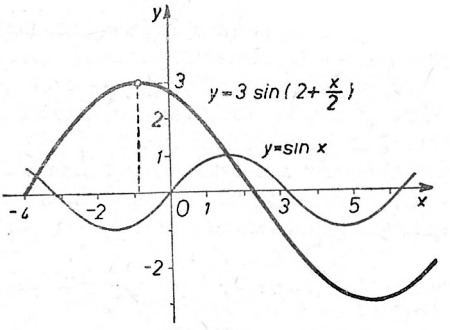
Megoldás:

A függvényt az $y = \sin x$ függvény görbéjéből származtathatjuk. Ha megfelelőképp átalakítjuk a függvényt:

$$\frac{y}{3} = \sin \frac{1}{2}(x + 4)$$

azonnal leolvashatjuk, hogy az x-tengely irányában kétszeres nyújtást, az y-tengely irányában háromszoros nyújtást, majd az x-tengelyen «balra» (azaz a választott pozitív iránnyal ellenkező értelemben) 4 egységnyi eltolást kell végeznünk: L. a 75. ábrát.

Származtassuk transzformációval az alábbi függvényeket a trigonometrikus függvények valamelyikéből! Gyakorlásképpen néhányon rajzban is elvégezhetjük a transzformációt!



75. ábra

26. $y = 1 - 0{,}6 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} - 4\right)$.

27. $\frac{y}{2} = 0{,}5 \sin(2x - 3) - 1$.

28. $y = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}x - 0{,}8\right)$.

29. $y = 2 \operatorname{ctg}(3x - 0{,}7) + 1$.

30. Ábrázoljuk az $y = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) + \sin(2x - 3)$ függvényt oly módon, hogy mindkét tagját ábrázoljuk, majd grafikusan összegezünk.

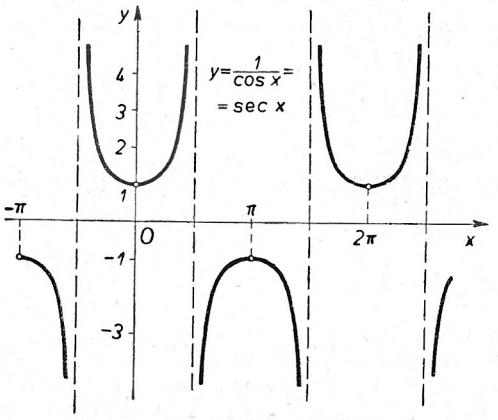
Származtassuk transzformációval és összegezéssel az alábbi függvényeket. Esetleg ábrázoljuk is őket!

31. $$y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} - 1\right) - \cos(1{,}5x + 2).$$

32. $$y = 2 \operatorname{tg}(2x + 2) - \cos\left(\frac{x}{3} + 1\right).$$

33. $$y - 2 = 2 \operatorname{ctg}(3x - 1) - 5 \sin\left(\frac{x}{2} + 2\right).$$

34. Vizsgáljuk meg (és esetleg ábrázoljuk) az $y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$ függvényt — a törtfüggvényeknél tanultak figyelembevételével.



76. ábra

Megoldás:

a) A cos x periodikus függvény; $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$. Periodikus, ennek következtében reciproka is: $\frac{1}{\cos(x + 2k\pi)} = \frac{1}{\cos x}$. Elegendő tehát 1 periódusra (pl. a $0 - 2\pi$ szakaszra) megszerkeszteni a görbét.

b) A $(0, 2\pi)$ intervallumban a cos x az $x = \frac{\pi}{2}$ és $x = \frac{3\pi}{2}$ helyeken a 0 értéket veszi fel. Az $\frac{1}{\cos x}$ függvény tt nem definiált. Határértéke azonban van (l. függeléket is; hiszen a szám-

láló nem 0, és a tört a 0-hely elég kis környezetében csak egyszer vált előjelet). Éspedig minden határon túl nő, illetve csökken a függvény, a cos x előjele szerint, amint a $\frac{\pi}{2}$, ill. $\frac{3\pi}{2}$ helyhez közeledünk. Mivel a cos x 0-helyein jelet is vált — a számláló viszont nem, ezért itt páratlan rendű pólus van. Kiszámítva néhány értéket az $y = \frac{1}{\cos x}$ képlet alapján — elsősorban ott, ahol a cos x függvény legnagyobb, s így reciprokának legkisebb értéke (abszolút értékre nézve) az $1 - a$ görbéről igen jó vázlatot tudunk készíteni!

35. Rajzoljuk meg a $z = \frac{\sin x}{x}$ függvénygörbét az x-szel való osztásra tanult szerkesztés alapján!

36. Ábrázoljuk az $y = \sin(x^2)$ függvényt a közvetett függvényekre tanult szerkesztés alapján.

37. Rajzoljuk meg az $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ függvény grafikonját, grafikusan végezve az osztást (l. 35. példát is!)

38. Ábrázoljuk az x-szel történő grafikus szorzás segítségével az

$$y = x \cdot \sin x \quad \text{és} \quad z = x \cdot \cos x \text{ függvényeket!}$$

8. § α) β)

Mutassuk ki, hogy az alábbi egyenlőségek jobb és bal oldalán ugyanazok a függvények szerepelnek, vagyis az egyenlőségek az x változó bármely értékére fennállnak. (Tehát azonosságokkal van dolgunk. Ezt szoktuk a $\equiv$ jellel jelölni.)

1. $$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv \cos x.$$

Megoldás:

α) $$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right],$$

hiszen a $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ összefüggés, mint tudjuk, x bármely értékére fennáll

$$\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] \equiv \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) \equiv \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \equiv \cos x,$$

utóbbi a pótszögösszefüggések alapján.

Tehát:
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv \cos x.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv -\sin x.$

3. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv -\operatorname{ctg} x.$

4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \equiv -\operatorname{tg} x.$

5. $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\cos x.$

6. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \equiv \sin x.$

7. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\operatorname{ctg} x.$

8. $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \equiv -\operatorname{tg} x.$

Fejezzük ki az alábbi függvényeket az $y = \sin x$ független változó segítségével:

9. $z = \cos x$; $z = f(y) = ?$

Megoldás:

a) A pythagorasi összefüggések szerint

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Azaz: $$y^2 + z^2 = 1.$$

Amiből: $$z = \sqrt{1-y^2} = f(y).$$

10. $v = \operatorname{tg} x$; $v = \varphi(y) = ?$ 11. $w = \operatorname{ctg} x$; $w = \psi(y) = ?$

Határozzuk meg a $z = \operatorname{tg} x$ változó segítségével az alábbi függvényeket, mint z függvényeit:

12. $u = \sin x$. 13. $y = \cos x$. 14. $v = \operatorname{ctg} x$.

Fejezzük ki a $w = \cos x$ változó segítségével az alábbi függvényeket:

15. $y = \sin x$; $y = f(w) = ?$ 16. $u = \operatorname{tg} x$; $u = \varphi(w) = ?$

17. $v = \operatorname{ctg} x$; $v = \psi(w) = ?$

Igazoljuk, hogy az alábbi függvényeket (közönséges, Descartes-koordinátarendszerben) egyenes ábrázolja. Határozzuk meg az egyenes egyenletét!

18. $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. 19. $w = \operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{ctg}\left(u - \frac{\pi}{2}\right)$.

20. $$v = \sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

Megoldás:

a) $$v = \sin 2x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

A szorzást olyan alakban szeretnők elvégezni, hogy a törtektől megszabaduljunk. Erre módunk is van, hiszen a kétszeres-szög összefüggések szerint:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Így

$$v = 2 \sin x \cos x \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Az egyenes egyenlete tehát:

$$v = 2.$$

Ez pedig az x-tengellyel párhuzamos, tőle 2 egységnyi távolságban húzódó egyenes.

Igazoljuk a következő azonosságokat:

21. $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \equiv \left(\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}\right)^2$. 22. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 \equiv \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$.

23. $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x \equiv \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$.

24. Egy szög sinusa

a) $\sin x = 0{,}45$; illetve b) $\sin x = 0{,}32$.

Számítsuk ki ennek alapján $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ értékét, ill. értékeit!

25. Az x cosinusa adott:

a) $\cos x = 0{,}8$; b) $\cos x = -0{,}45$; c) $\cos x = 1$.

Számítsuk ki ennek alapján $\sin x$; $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$ értékeit!

26. Az u szög tangense ismert:

a) $\operatorname{tg} u = 0{,}4$; b) $\operatorname{tg} u = 3{,}14$;

Számítsuk ki ennek alapján $\sin u$; $\cos u$; $\operatorname{ctg} u$ értékeit!

27. Számítsuk ki $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$; $\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$; $\sin(u - \pi)$

értékét is, a 26. f. adataira támaszkodva.

28. $\cos x = -0{,}82$.

Számítsuk ki $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ értékét.

29. Határozzuk meg a 28. f. alapján

$$\sin x + \operatorname{ctg}(\pi - x)$$

és

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

értékét!

30. $\sin v = -0{,}08$.

Számítsuk ki

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} + \cos v; \quad \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg} v; \quad \cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

értékét.

$\sin x = u$. Fejezzük ki az alábbi függvényeket mint u függvényét!

31. $y = \sin 3x$. 32. $v = \cos 2x \cdot \sin x$.

33. $w = \operatorname{tg} 2x$. 34. $z = \cos 3x$.

$\cos x = v$. Fejezzük ki alábbi függvényeket a v független változó segítségével!

35. $y = \sin 3x$. 36. $w = \sin 2x$.

37. $u = \cos 3x$. 38. $z = \operatorname{tg} x \sin x$.

Adott:

$$\sin x = 0{,}72; \qquad \cos\beta = -0{,}31.$$

Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket!

39. $\sin(x+\beta)$.
40. $\cos(x+\beta)$.
41. $\sin(x-\beta)$.
42. $\cos(2x-\beta)$.
43. $\operatorname{tg}(x+2\beta)$.
44. $\operatorname{ctg}(x-\beta)$.

45. $\sin u = y$. Határozzuk meg a $v = \sin\frac{u}{2}$; $w = \cos\frac{u}{2}$; $z = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ függvényeket, mint y függvényét!

Adott egy szög tangense és egy másik cosinusa: $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}82$; $\cos\beta = -0{,}35$. Határozzuk meg ezek birtokában a következőket:

46. $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$.
47. $\cos(\alpha+2\beta)$.
48. $\sin(2\alpha-2\beta)$.
49. $\cos(\alpha-\beta)$.
50. $\sin(2\alpha+\beta)$.
51. $\operatorname{tg}(\alpha-2\beta)$.

$$y = \sin 2x$$

Adjuk meg az alábbi függvények (z) függő változóját mint y függvényét. Esetleg ábrázoljuk a kapcsolatot a (z, y) koordinátarendszerben!

52. $z = \sin x$.
53. $z = \sin\frac{x}{2}$.
54. $z = \sin 4x$.

$$u = \sin\frac{x}{2}$$

Adjuk meg az alábbi függvényeket mint u függvényeit; ábrázolhatjuk is a kapcsolatot a (z, u) koordinátarendszerben:

55. $z = \sin\frac{3x}{2}$.
56. $z = \cos x$.
57. $z = \cos\frac{x}{2}$.
58. $z = \cos\frac{3x}{2}$.
58. $z = \cos 2x$.
60. $z = \operatorname{tg} x$.

61. $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

62. Ábrázoljuk az $y = 3 \cdot \sin(x+1) \cdot \cos(2x+4)$ függvényt.

Megoldás:

a) Tekintettel arra, hogy grafikus szorzást lényegesen nehezebben végezhetünk, mint grafikus összeadást, célszerű lesz a szorzatot összeggé alakítanunk:

$$y = 3 \cdot \sin(x+1) \cdot \cos(2x+4) = \frac{1}{2} \cdot 3[\sin(x+1+2x+4)+$$

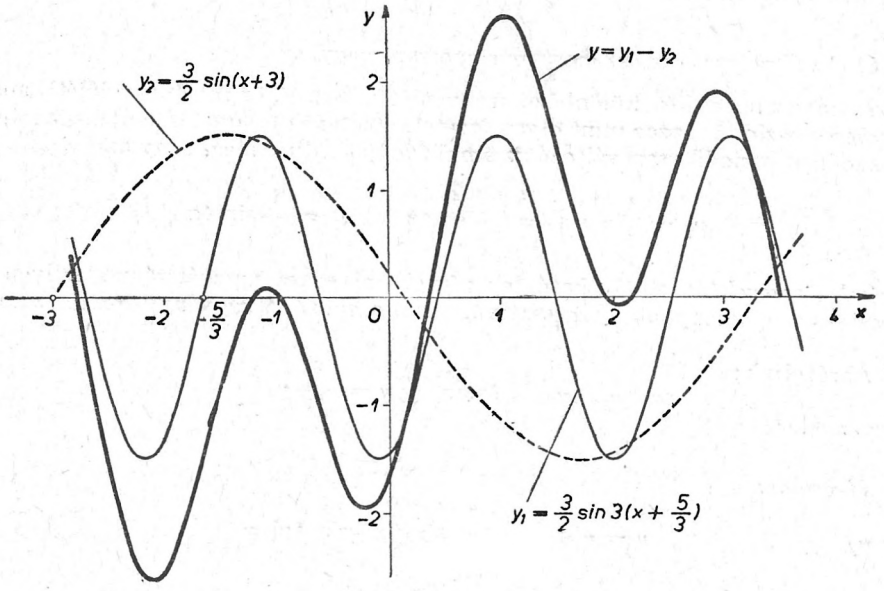
$$+\sin(x+1-2x-4)] = \frac{3}{2} \cdot \sin(3x+5) + \frac{3}{2}\sin(-x-3) = y_1 - y_2.$$

Itt:

$$y_1 = \frac{3}{2}\sin(3x+5); \qquad y_2 = \frac{3}{2}\sin(x+3).$$

b) Azaz:

$$y = (y_1 - y_2).$$



77. ábra

Származtassuk az alábbi függvényeket egyszerű trigonometrikus függvényekből, kizárólag a lineáris transzformációt és összegezést felhasználva. Ennek alapján esetleg ábrát is készíthetünk.

63. $y = \cos(3x-1) \cdot \cos(3-2x)$. **64.** $y = \sin(2x+3) \cdot \sin(3x-4)$.

65. $y = \cos(3x-2) \cdot \sin(2x-3)$. **66.** $y = \sin(x-7) \cdot \sin(2x+2)$.

67. $y = 4 \cdot \cos(2x-2) \cdot \sin(3x-4) \cdot \sin(x+7)$.

Megoldás:

a) Az átalakítást két lépésben hajtjuk végre:

$$y = 4[\cos(2x-2)\cdot\sin(3x-4)]\cdot[\sin(x+7)] =$$

$$= \frac{4}{2}[\sin(5x-6)+\sin(x-2)]\cdot[\sin(x+7)] =$$

$$= 2\cdot\sin(5x-6)\cdot\sin(x+7)+2\cdot\sin(x-2)\cdot\sin(x+7) =$$

$$= \cos(4x-13)-\cos(6x+1)+\cos(-9)-\cos(2x+5) =$$

$$= \cos 4\left(x-\frac{13}{4}\right)-\cos 6\left(x+\frac{1}{6}\right)-\cos 2(x+2{,}5)+\cos 9 \cong$$

$$\cong -0{,}9112+\cos 4\left(x-\frac{13}{4}\right)-\cos 6\left(x+\frac{1}{6}\right)-\cos 2(x+2{,}5).$$

b) Az ábra szerkesztése most már gyorsan megy.

68. A hangtanban két különböző frekvenciájú rezgés összegét (eredőjét) min ún. *lebegést* észleljük, azaz mint olyan érzetet, amelynek állandó a hangmagassága de az időben periodikusan változó az amplitúdója. Adjuk meg, hogy az

$$y_1 = \frac{1}{4}\cdot\sin 6x \qquad \text{és az} \qquad y_2 = \frac{1}{4}\sin 4x$$

rezgések összegeként előállítható lebegésnek mi az alaprezgésszáma, milyen a lebegés (az alacsonyabb rezgésszámú, ún. amplitúdófüggvény) rezgésszáma.

Ábrázoljuk:

az y_1, y_2 és az $y = y_1+y_2$

függvényeket!

Megoldás:

a)
$$y = y_1+y_2 = \frac{1}{4}[\sin 6x+\sin 4x] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\cos\frac{6x-4x}{2}\cdot\sin\frac{6x+4x}{2} = \frac{1}{2}\cos x\cdot\sin 5x.$$

b) Tehát az alaprezgés frekvenciája: $v_a = 5$,

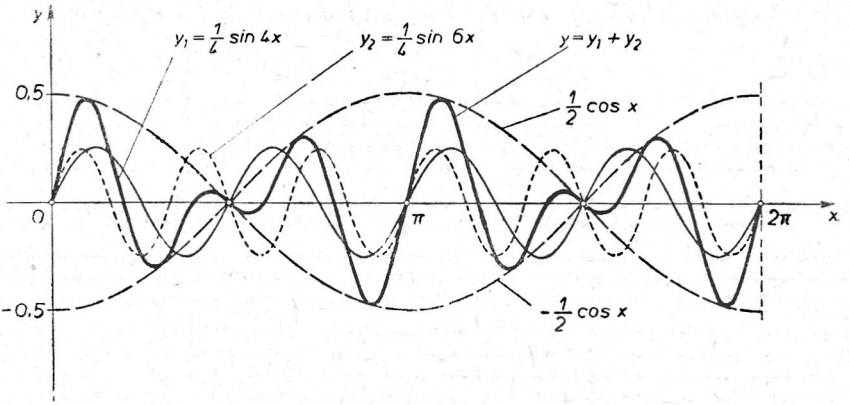
a lebegés frekvenciája: $v_l = 1$.

c) Az ábrázolás természetesen az összegalak alapján egyszerűbb Figyeljük meg az összegen a lebegést és az alaprezgést. (L. a 78. ábrát, a túloldalon!)

69. Az $y_1 = \cos(156x-8)$ és az $y_2 = \cos(3x-2)$ rezgéseket szuperponáljuk. Mi lesz a modulált rezgés alaprezgésszáma; milyen rezgésszámú lesz a lebegés? Ábrázoljuk az $y = y_1+y_2$ függvényt!

70. $y_1 = \sin(300x+7)$; $y_2 = \cos(180x-2)$.

Szuperponálva a rezgéseket, mi lesz a lebegés rezgésszáma és az alaprezgésszám?



78. ábra

Megoldás:

a) Hogy a lehető legegyszerűbb módon számolhassuk az eredményt, vagy az y_1 vagy az y_2 függvényt alakítjuk át. Utóbbit választva:

$$y_2 = \cos(180x - 2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 180x + 2\right) = -\sin\left[180x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Ezzel:

$$y_1 + y_2 = \sin(300x + 7) - \sin\left[180x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

b) A többit már az olvasóra bízzuk!

71. Számítsuk ki

$$\log(\sin x + \sin 27°35')$$

értékét az $x = 186°$-os helyen.

Megoldás:

1. Tekintettel arra hogy szorzat logaritmusát lényegesen könnyebb számolni, mint összegét (különösen akkor, ha a tényezők logaritmusát a tábla közvetlenül tartalmazza: a szögfüggvények logaritmusát pedig minden tábla tartalmazza), az összeget szorzattá alakítjuk:

$$\log(\sin 186° + \sin 27°35') = \log\left(2 \cdot \sin\frac{213°35'}{2} \cdot \cos\frac{158°25'}{2}\right) =$$

$$= \log 2 + \log \sin 106°47{,}5' + \log \cos 79°12{,}5' \cong$$

$$\cong 0{,}3010 + 9{,}98108 - 10 + 9{,}28182 - 10 \cong -0{,}4361.$$

72. Számítsuk ki log (cos 0,72 + cos 1,17) értékét!

73. Számítsuk ki log (cos 37°42′ + sin 176°04′30″) értékét.

74. Számítsuk ki log (sin 2,72—cos 1,34) értékét.

Geometriai és mechanikai alkalmazások

8. §. a) γ)

1. Egy folyó partján két pont egymástól 180 méternyire van. A túlsó parton, közvetlenül a víz szélén, egy jegenye nő, amelyet egyik pontból 74°30′-es, a másik pontból x radiánnyi szög alatt (a két pontot összekötő egyenestől mérve) látunk.

Mi az összefüggés a folyó y szélessége és az x látószög között? Ábrázoljuk ezt.

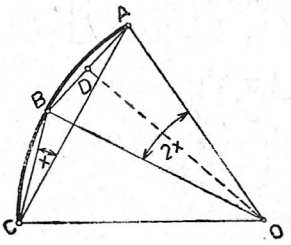
2. Egy torony — lábától 1200 méternyire levő pontból — x radiánnyi szög alatt látható. Mi az összefüggés a torony y magassága és a látószög között?

3. Egy hegy csúcsa két — egymástól négy kilométernyire levő — pont egyikéből a vízszinteshez x radiános szög alatt látszik. A látóirányok vetülete a két pontot összekötő egyenessel 86° 40′-es, illetve 83°20′-es szöget zár be. Milyen magas a csúcs?

4. Egy körívnek tekinthető vasúti kanyar két pontját kijelöljük, és lemérjük egymástól való távolságukat (az összekötő egyenes mentén), s ez 24 méternyinek adódik. Kijelölünk még egy pontot ugyancsak az íven (de úgy, hogy az ne essék a két pont közé), s innét lemérjük a két előző pont látószögének különbségét; ez x radiánnak adódik. Hogy függ x-től a sín ívének y sugara?

Megoldás:

a) Azt az elemi geometriai tételt kell felhasználnunk nyilván, hogy a köríven az összes kerületi szögek egyenlőek — ha ugyanahhoz az ívhez tartoznak —, és a középponti szögnek a felét adják.



79. ábra

Ezek alapján a sín ívének centrumában a két pontot $2x$ radiánnyi szög alatt látnók.

A két pontot összekötő húr felét $\left(\frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AD}\right)$ ezek szerint x radiánnyi szög alatt látjuk a centrumból. Ez a távolság:

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

(jelöléseket lásd 79. ábránl)

Ezek alapján az ív sugara: $\overline{OA}$ az OAD △ átfogója:

$$y = \overline{OA} = \frac{\overline{AD}}{\sin x} = \frac{12}{\sin x}.$$

5. Egy csónakkal egy félkör alakú medence egyik sarokpontjából az átmérőhöz x radiánnyi szög alatt indulnak. Beleütközve a medence körív alakú szélébe, csónakukkal egyenesen a másik sarokpont felé eveznek. A medence átmérője: $D = 1856$ m. Hogyan függ a csónak által összesen megtett y út az x szögtől?

6. Egy csónak nyugvó vízben 156 m/perc sebességgel halad. Mekkora y sebességgel halad folyóvízben, ha a csónak orra a víz áramlási irányával x szöget zár be? A folyóvíz sebessége 28 m/perc!

7. Egy testre két, egymással x radiánnyi szöget bezáró, 186 kg-os és 735 kg-os erő hat. Mekkora az eredő erő: y? Hogy függ az eredő a szögtől?

δ) Rezgéstani alkalmazások

* *Harmonikus rezgő mozgásnak* hívjuk a természet mindazon mozgásait, amelyeknél *a rezgő pontnak a nyugalmi helyzettől mért távolsága az időnek* trigonometrikus (éspedig vagy *sinusos vagy cosinusos*) *függvénye*. Tekintettel arra, hogy két, harmonikus rezgő mozgást végző pont kapcsolatait (pl. — egymástól való távolságukat az idő függvényében

sebességük különbségét stb.) még akkor is nagyon körülményes matematikailag megadni — vagy pedig az esetleg megadott kapcsolatból következtetéseket levonni —, ha a két rezgés frekvenciája történetesen megegyezik; a fizikus és a matematikus szívesen hajlik arra, hogy — pusztán a szemléletes kép és használható képletalkotás kedvéért — *minden harmonikus rezgéshez hozzárendeljen egy* — adott sugarú — *kör kerületén egyenletes szögsebességgel forgó pontot.* Ennek a pontnak a vízszintes (vagy a függőleges) átmérőre vett vetületének mérőhossza minden időpillanatban megegyezik a harmonikus rezgést végző test pillanatnyi — a nyugalmi helyzettől számított — kitérésének nagyságával.

Ennek közvetlen következménye, hogy *azonos frekvenciájú rezgések viszonylatainak vizsgálatához* nincs szükségünk bonyolult időfüggvényekre; egy pillanatkép a két — az egyes rezgésekhez rendelt és a kör kerületén egymással egyező szögsebességgel forgó — pontról, a két ponthoz tartozó rádiuszvektorok egymással bezárt (és az időben állandó nagyságú) szöge mindent elárul. Sőt: *különböző frekvenciájú rezgések viszonylatainak* megvilágítására is kiválóan alkalmas ez a gondolat. Itt is elegendő ismerni azt a törvényt, amely megadja, hogy a két — rezgő rendszerhez rendelt, forgó pontba húzott — rádiuszvektor által bezárt szög miként változik az időben. Márpedig ez a törvény is hallatlanul egyszerű: a szög és az idő közötti kapcsolat lineáris.

A kérdéses *kör* sugarát úgy választjuk, hogy az megegyezzék a rezgő mozgást végző pont amplitúdójával (ez a nyugalmi helyzettől mért maximális távolság), A-val; a trigonometrikus függvényre való tekintettel pedig nem a frekvenciát, hanem a *körfrekvenciát* használjuk a rezgés leírásánál. Ugyanis a fizikai jelenséget — amely periodikus — egy ugyancsak periodikus matematikai függvénnyel írjuk le; míg azonban a fizikai jelenség periódusa esetenként más és más, addig az őt leíró függvény saját argumentumának minden körülmények között 2π periódusú függvénye. Arról kell gondoskodnunk tehát, hogy ez az argumentum másodpercenként annyiszor növelje értékét 2π-vel, mint amekkora a rezgés frekvenciája. Ha ti. a rezgés másodpercenként ν-ször (ν: a frekvencia) ismétlődik, akkor az argumentumnak másodpercenként $\nu \cdot 2\pi$ értékkel kell megváltoznia, hogy a trigonometrikus függvény épp ν perióduson menjen át. Ezt a $\nu \cdot 2\pi$ értéket hívjuk körfrekvenciának és ω-val jelöljük:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu.$$

Szokás ω-t még így is jellemezni: 2π-másodpercenkénti rezgések száma.

Nyilvánvaló, hogy a kör kerületén mozgó pont *szögsebessége* ez az érték kell, hogy legyen! Így ugyanis a pont másodpercenként szintén $2\pi\nu$ szöget ír le, azaz éppen ν-ször futja be a teljes kört, ν periódussal mozog.

Ha ezenkívül bevezetjük a ϑ szöget, az ún. *fáziseltolás szögét* — mely azt mutatja meg, hogy a $t = 0$ időpillanatban hol kell tartózkodnia a kör kerületén mozgó pontnak, hogy vetülete a harmonikus rezgést végző test $t = 0$ pillanatbani kitérésével egyezzék, akkor meg tudjuk adni a kör kerületén mozgó pont mozgásegyenletét: az α szögelfordulást mint az idő függvényét:

$$\alpha = \omega \cdot t + \vartheta.$$

Ekkor a pontnak a függőleges tengelyre vett vetülete valóban:

$$y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \vartheta)$$

[illetve a vízszintes tengelyre vett vetület: $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \vartheta)$. Megállapodás szerint inkább az előző vetületet használjuk fel a mozgás leírására].

1. Igazoljuk, hogy *két azonos amplitúdójú és frekvenciájú rezgés szuperpozícióját* helyesen kapjuk, ha a két kör kerületén mozgó pontról pillanatfelvételt készítünk és a hozzájuk húzott vektorokat — a vektorok összeadási szabályának megfelelően — összegezzük, és az összegvektort forgatjuk azután egyenletes szögsebességgel körbe!

Megoldás:

a) Legyen a két rezgés közös amplitudója: A_1, közös körfrekvenciája: ω_1, az egyik rezgés fázisszöge: ϑ_1, a másiké: ϑ_2.
Ekkor az első rezgés leírása:

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \vartheta_1); \text{ a másodiké: } y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \vartheta_2),$$

Az eredő rezgés:

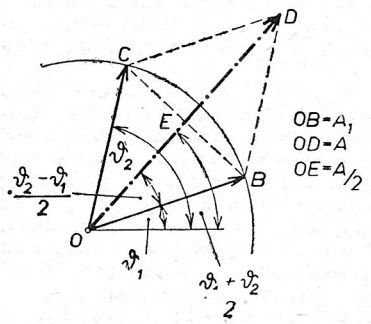
$$y = y_1 + y_2 = A_1 [\sin(\omega_1 t + \vartheta_1) + \sin(\omega_1 t + \vartheta_2)] =$$

$$= 2A_1 \sin \frac{\omega_1 t + \vartheta_1 + \omega_1 t + \vartheta_2}{2} \cdot \cos \frac{\omega_1 t + \vartheta_1 - (\omega_1 t + \vartheta_2)}{2}$$

(a függvényösszeg összefüggések alapján; 1. 8. § *a) β)*)

$$y = 2A_1 \cdot \cos \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \cdot \sin\left(\omega_1 t + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right).$$

b) Annyit máris kiolvashatunk, hogy a fáziseltolás valóban az eredeti fáziseltolások szögének fele, azaz számtani közepük. A mellékelt ábrából azonnal kiolvasható, hogy ez valóban megfelelja vektorösszeadási szabálynak! Az eredő amplitúdót illetően: — ugyancsak az ábrából kiindulva — ahol is felhasználtuk, hogy az amplitúdók egyenlőek, tehát az OBD $\triangle$ egyenlőszárú — az eredő amplitúdó felére a következőt kapjuk.:



80. ábra

$$\frac{A}{2} = A_1 \cdot \cos \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}.$$

Ebből az egyenlőségből pedig A valóban az előbb kiszámított nagyságnak megfelelően adódik:

$$A = 2A_1 \cdot \cos \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2},$$

Az új körfrekvencia pedig — a képletből kiolvashatóan — megegyezik a régivel.

2. Igazoljuk, hogy *az előző feladatban szereplő két harmonikusan rezgő pont egymástól mért távolsága* az előző feladatban használt két vektor különbségvektorának ω szögsebességgel történő forgatásával adódik, mint ezen forgó különbségvektor vetülete a függőleges tengelyen!

Különböző amplitúdójú és különböző frekvenciájú rezgések egymáshoz való viszonya ugyanígy megadható. Ehhez azonban először meg kell ismerkednünk egy másik nagyon gyakran alkalmazott eljárással a rezgésekkel kapcsolatban. *Gyakran* megtörténik ugyanis, hogy a harmonikus rezgéshez nem a fáziseltolás szögét adják meg, hanem *két* 0° *fáziskésésű, de egymáshoz képest* 90°*-kal eltolt rezgés szuperpozíciójaként adják meg a rezgést.* Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy az eddigiekben felhasznált, a kerületen mozgó pontnak nem a $t = 0$ időpillanatbeli helyét adjuk meg, hanem vagy két — egymáshoz $\frac{\pi}{2}$-kel elforgatott —pont vetületének összegével adjuk meg a kitérés nagyságát (a két pont közül az egyik 0 szöggel indul $t = 0$-ban), vagy ugyanannak a pontnak a két tengelyén vett vetületeinek összegével (a kérdéses pont a $t = 0$ pillanatban 0 fázisszöggel indul). Ennek az eljárásnak az a magyarázata, hogy így két rezgés szuperpozíciója egyszerűbb, egyszerűen össze lehet adni külön a vízszintes és külön a függőleges tengelyre vett vetületeket — épp úgy, mint a vektoroknál. Ezzel szemben *lényegesen kisebb a szemléletessége ennek a módszernek.* Mivel azonban a különböző amplitúdójú rezgéseket csakis ezzel a módszerrel tudjuk szuperponálni, meg kell ismernünk, hogyan lehet áttérni egyik megadási módról a másikra.

Mi *eddig a rezgést így adtuk meg:*

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \vartheta).$$

Felhasználva az összegképletet:

$$y = A \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\omega t + A \sin\vartheta \cos\omega t.$$

Ha most az $A \cos\vartheta$ szorzatot röviden B-vel, az $A \sin\vartheta$-t pedig C-vel jelöljük, *az új alakja* a rezgésegyenletnek:

$$y = B \sin\omega t + C \cdot \cos\omega t.$$

Ezek alapján *két rezgés összege:*

$$y_1 = B_1 \sin \omega t + C_1 \cdot \cos \omega t,$$

$$y_2 = B_2 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

$$y = y_1 + y_2 = B_1 \cdot \sin \omega t + C_1 \cdot \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + C_2 \cdot \cos \omega t =$$

$$= (B_1 + B_2) \sin \omega t + (C_1 + C_2) \cos \omega t.$$

Az átírás ebben az irányban egészen közvetlen. *Visszafelé lényegesen nehezebb*, és fel kell használnunk a trigonometrikus függvények inverzeit is.

3. Igazoljuk, hogy az $y = B \cdot \sin \omega t + C \cdot \cos \omega t$ alakban megadott rezgést a következő egyenletek segítségével írhatjuk *vissza az eredeti alakba:*

$$y = A \cdot \sin (\omega t + \varphi),$$

ahol $A = \sqrt{B^2 + C^2}$ és $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{B}$; azaz $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{C}{B}$,

és ezekkel: $B = A \cdot \cos \varphi$; $C = A \cdot \sin \varphi$.

4. Az előzőekben elmondottak segítségével most már könnyen igazolhatjuk, hogy *különböző amplitudók, de azonos frekvenciák esetén* is meghatározhatjuk *az eredő rezgést a vektorok összeadási tétele segítségével.*

5. Igazoljuk, hogy a két rezgő mozgást végző pont egymáshoz mért távolságát is megkaphatjuk úgy, hogy a két vektor különbségvektorát forgatjuk ω szögsebességgel körül; föltéve, hogy a két rezgés azonos frekvenciájú, de különböző amplitúdójú.

Az eddigiek szerint tehát *azonos frekvenciájú rezgések esetén* valóban *bármelyik pillanatban elkészíthettük a vektorokról a pillanatfelvételt* és ezen a szükséges összeadást vagy kivonást — hiszen a pillanatfelvétel az időtől csak annyiban függ, hogy a vektorok egyenletes szögsebességgel, de az *egymáshoz képesti viszonylagos helyzetüket megőrizve* forognak.

Ezzel szemben különböző szögsebességgel forgó vektorok — azaz *különböző frekvenciájú rezgések — esetén* az a döntő különbség, hogy *a vektorok egymáshoz képesti helyzete az időben változik; a pillanatképnek* tehát nemcsak a koordinátarendszerhez képesti *helyzete*, hanem *alakja is változik* az időben.

Éppen erre való tekintettel a következő feladatban, amikor is két különböző frekvenciájú rezgés összetételét beszéljük meg, *a fáziseltolás szögét mindkettőnél 0-nak vesszük.* Ennek lehetősége éppen abban rejlik, hogy egymáshoz képesti helyzetét a két vektor úgyis állandóan változtatja; valamelyik egybeesésükkor kezdjük meg az időszámlálást, azaz vesszük fel a $t = 0$ időpillanatot, amikor épp a függőleges tengelyen fedik egymást.

6. Határozzuk meg, hogy mi lesz az

$$y_1 = A_1 \cdot \sin \omega_1 t$$

és az

$$y_2 = A_2 \cdot \sin \omega_2 t$$

rezgések eredője.

Megoldás:

a) $y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin \omega_1 t + A_2 \cdot \sin \omega_2 t$. Hogy a két rezgést összegezni tudjuk, mindkettőt úgy kell két tagból összeillesztenünk, hogy *azonos amplitúdójú rezgések különbsége* és összege szerepeljen egy-egy — megfelelő átrendezés után előálló – összegben. Ezeket — és csak ezeket — ugyanis összegezni tudjuk:

Keresnünk kell tehát egy olyan B és C számot, amelyekre

$$A_1 = B + C.$$

$$A_2 = B - C.$$

Ebből: $B = \frac{A_1+A_2}{2}$; $C = \frac{A_1-A_2}{2}$.

Így:

$$y = B \cdot \sin\omega_1 t + C \cdot \sin\omega_1 t + B \cdot \sin\omega_2 t - C \cdot \sin\omega_2 t =$$
$$= B(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) + C(\sin\omega_1 t - \sin\omega_2 t) =$$
$$= 2B \cdot \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t \cdot \cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t + 2C \cdot \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t \cdot \cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t.$$

Megkíséreljük az itt felírt alakot harmonikus rezgésnek tekinteni, ebből a célból a *δ)* 3. feladatban megismert képlet alapján összevonjuk:

$$y = A(t) \cdot \sin\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \cdot t + \vartheta(t)\right],$$

ahol

$$A(t) = \sqrt{4B^2\cos^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + 4C^2\sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} =$$
$$= 2\sqrt{B^2 \cdot \cos^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + B^2 \cdot \sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + (C^2-B^2)\sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} =$$
$$= 2\sqrt{B^2+(C^2-B^2)\sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} = 2B\sqrt{1+\frac{C^2-B^2}{B^2}\sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2} \cdot t};$$

$$\vartheta(t) = \operatorname{arc\,tg}\frac{2C \cdot \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t}{2B \cdot \cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{C}{B} \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right].$$

b) Ebből a következő érdekes eredményt olvashatjuk le: amennyiben a két különböző frekvenciájú és különböző amplitúdójú rezgést szuperponáljuk, *az eredő rezgés amplitúdója nem harmonikus* függvénye az időnek (azaz nem fejezhető ki egy állandó és egy egyszerű trigonometrikus függvény szorzataként); *a fáziseltolás szöge sem változik lineárisan az idővel.* Ha azonban *a két rezgés amplitúdói egyeznek*, azaz $C = 0$, *akkor* — kivételesen — *a fáziseltolás szöge* 0, *és az eredő amplitúdó*

$$A = 2B\sqrt{1-\sin^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} = 2B\sqrt{\cos^2\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t},$$

tehát:

$$A = 2B\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t,$$

azaz harmonikus függvénye az időnek. Tekintettel arra, hogy pl. rádióállomásoknál nem lehet biztosítani hogy a moduláló frekvencia, az y_1 rezgés amplitúdója (A_2) mindig pontosan egyezzék a vivőfrekvencia amplitúdójával, A_1-gyel, ezért ott nem is ezt a modulációs rendszert alkalmazzák; annak következtében ugyanis, hogy $A(t)$ nem harmonikus függvénye az időnek, erős torzítás lép fel a vételnél.

Adóknál az ún. kétoldalsávos modulációt használják, az előbbi ún. egyoldalsávos adással szemben; azaz a vivőfrekvenciára: $y_1 = A_1 \cdot \sin\omega t$-ra két «oldalsávot» szuperponálnak, amelyek azonos amplitúdójúak, és az egyik az átviendő hang frekvenciájával, ω_0-val kisebb, a másik ugyanennyivel nagyobb frekvenciájú a vivőfrekvenciánál.

7. Igazoljuk, hogy az

$$y_1 = A_1 \sin\omega_1 t;$$
$$y_2 = A_2 \sin(\omega_1-\omega_0)t$$

és az

$$y_3 = A_2 \sin(\omega_1+\omega_0)t$$

rezgések szuperpozíciójaként olyan *eredő* áll elő, amelynek *amplitúdója már harmonikus* függvénye az időnek és amelyben *nincs időtől függő fáziseltolás*. (Ez az átviteli mód már torzításmentes.)

8. Igazoljuk, hogy a 8. § *a) ϑ)* 6. és a 8. § *a) ϑ)* 7. feladatban *előálló függvények csak akkor periodikusak, ha a két frekvencia* ω_1 és ω_2, illetve ω_1 és ω_0 *viszonya racionális szám.*

Megoldás:

a) Mindkét esetben csak akkor lehet az eredőfüggvény periodikus, ha találunk egy olyan $t = T$ időpontot, amikor az eredőfüggvény ugyanolyan értéket vesz fel, mint a $t = 0$ pillanatban. Ha ilyet találunk, akkor az a legkisebb T, amelyre a feltétel teljesül, lesz éppen az eredő *rezgésidő*; ennek reciproka pedig az eredő *frekvencia*. Ehhez pedig nyilván az szükséges, hogy a kérdéses T időpillanatban *az amplitúdó* is és a *rezgést* jellemző másik tényező is ugyanazt az értéket vegye fel, mint a $t = 0$ időpontban. Ez pedig csak úgy lehetséges, hogy ez alatt az idő alatt mindkét tényező argumentuma a 2π-nek valamilyen egész számú többszörösével változik meg — az első például $k \cdot 2\pi$-vel, a második $n \cdot 2\pi$-vel.

Azaz a *δ)* 6. feladatban az amplitúdó argumentuma:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot T = 2k\pi\text{-vel},$$

a második tényező argumentuma pedig, azaz $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} T$, $2n\pi$-vel legyen egyenlő:

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} T = 2n\pi .$$

(Az eredő ugyan két tagból áll, azonban mindkét tagban ugyanezen argumentumok függvényei szerepelnek. A feltételek tehát együtt teljesülnek — vagy nem teljesülnek — mindkét tagban, s így az összegben is!)

A két egyenletet osztva egymással, az

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{k}{n}$$

reláció adódik.

Utóbbit ω_2-vel számlálóban és nevezőben osztva, majd $\frac{\omega_1}{\omega_2}$-t kifejezve, a következő igen érdekes eredményre jutunk:

$$\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1}{\frac{\omega_1}{\omega_2} + 1} = \frac{k}{n};$$

ebből:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{\frac{k}{n}+1}{\frac{k}{n}-1} = -\frac{k+n}{k-n} = \frac{k+n}{n-k}.$$

Mivel pedig k és n is egész számok, ezért a $\frac{k+n}{n-k}$ tört — azaz az $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ viszony — bizonyosan racionális. Épp ezt akartuk igazolni!

b) A második esetben (a *δ)* 7. feladatból) a következő egyenleteknek kell teljesülniök:

$$\omega_0 T = k \cdot 2\pi,$$
$$\omega_1 T = n \cdot 2\pi,$$

azaz: $\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{k}{n}$; a frekvenciák viszonya valóban racionális számok viszonyával kell, hogy kifejezhető legyen.

c) Ha feltételünk teljesül, akkor pl. a második esetben meghatározzuk az $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ tört tovább már nem egyszerűsíthető, de számlálóban és nevezőben egész számot tartalmazó alakját:

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{k'}{n'};$$

ebből: $$T_{er} = \frac{k' 2\pi}{\omega_0}; \qquad \nu_{er} = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{k' \cdot 2\pi}$$

az eredő mozgás ismétlődési frekvenciája tehát:

$\nu_{er} = \frac{1}{k'} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{k'} \cdot \nu_0$-nak adódi k, ahol ν_0 a moduláló rezgés frekvenciaszáma.

Gyakran *két olyan rezgést kell szuperponálnunk, amelyek nem egy egyenes mentén, hanem pl. két egymásra merőleges egyenes mentén* vannak folyamatban. Ilyenkor a pont pillanatnyi helyzetét nem egy, hanem két koordinátával kell megadnunk. *Ebben az esetben a pont a síkban ún. Lissajoux-ábrát ír le.*

A pont mozgása legyen ilyen egyenletrendszerrel megadva:

$$x = A_1 \cdot \sin \omega_1 t; \qquad y = A_2 \cdot \sin (\omega_2 t + \vartheta).$$

9. Igazoljuk, hogy $\omega_1 = \omega_2$ esetén a pályagörbe mindig másodfokú görbe, éspedig $\vartheta_2 = 0$ esetén egyenes, $\vartheta_2 = \pi$ esetén szintén egyenes, $A_1 = A_2$ és $\vartheta_2 \neq 0$; $\vartheta_2 \neq \pi$ esetén kör, egyébként ellipszis.

Figyeljük meg, hogy $\vartheta_2 < \pi$ és $\vartheta_2 > \pi$ esetén ellenkező értelemben futjuk be az egyes Lissajoux-görbéket. (Közülük az egyiket jobbra cirkulárisnak, a másikat balra cirkuláris értelmű rezgésnek hívjuk.)

10. Igazoljuk továbbá, hogy $\omega_1 \neq \omega_2$ esetén csak akkor záródhatik a Lissajoux-ábra, ha $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ kifejezhető racionális számok viszonyával.

8. § *b) a)*

1. Számítsuk ki az $y = \sin x + \text{Arc cos } x$ függvény értékét az $x = 0{,}8$ helyen!

Megoldás:

a) A sinus argumentuma: 0,8 *szög*, amelyet át lehet (és tekintve, hogy logarléccel vagy táblával dolgozunk, át is kell) számítanunk fokokra: $0{,}8 = \frac{0{,}8}{\pi}\ 180° \cong$ $\cong 45{,}85°$. Ezzel szemben az Arc cos függvény argumentuma: 0,8 viszonyszám (egyelőre még ismeretlen szög cosinusa), tehát át nem számítható.

b) A két tagot külön számoljuk:

$$\sin 0{,}8 \cong \sin 45{,}85° \cong 0{,}7175.$$

$$\text{Arc cos } 0{,}8 = \ ?$$

(«Magyarra fordítva»: melyik az a szög, amelynek cosinusa 0,8.) A táblából kikeresve: Arc cos $0{,}8 \cong 36{,}84°$ a kapott szögérték. Ezt már át lehet számolni.

Sőt, a jelen esetben át is kell. Hiszen egy másik értéket, éspedig egy szög sinusának értékét kell hozzáadni, ami pedig viszonyszám. Márpedig csak «egynemű» mennyiségeket szabad összeadni; viszonyszámra, radiánra kell tehát átszámolni Arc cos 0,8 értékét is!

c) Így

$$y(0{,}8) \cong 0{,}7175 + \frac{36{,}84}{180}\pi \cong 0{,}7175 + 0{,}6435 = 1{,}3610.$$

2. Keressük meg Arc tg 1,3 − cos 0,5 értékét.
3. Adjuk meg arc cos 0,7 + arc tg 0,5 valamennyi értékét.
4. Adjuk meg Arc sin (−0,95) − tg 0,37 értékét.
5. Számítsuk ki Arc sin 0,3 + arc sin 0,3 valamennyi értékét.
6. Adjuk meg az $y = \text{tg}\, x + \text{Arc tg}\, x - \text{arc cos}\, x$ függvény értékét az $x = 0{,}4$ helyen!
7. Mivel egyenlő Arc sin 0,7 − arc cos 0,32 + Arc tg 0,88?
8. Számítsuk ki arc sin (−0,92) + Arc cos 0,3 − Arc tg 0,25 értékét.
9. Számítsuk ki Arc tg 0,8 + arc tg 0,42 valamennyi értékét.

8. § *b) β)*

Értéktáblázat alapján ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

1. $y = \text{Arc cos}\, x$.
2. $y = \text{Arc sin}\, x$.
3. $u = \text{Arc tg}\, x$.
4. $v = \text{Arc ctg}\, x$.

Az előbbi ábrák alapján (vagy pedig az eredeti függvény és inverze grafikonja közötti ismert kapcsolat segítségével) ábrázoljuk az alábbi függvényeket.

5. $y = \text{arc sin}\, x$.
6. $u = \text{arc cos}\, x$.
7. $v = \text{arc tg}\, x$.
8. $z = \text{arc ctg}\, x$.

Származtassuk transzformációval az alábbi függvényeket; közülük néhányat gyakorlásképp ábrázoljunk is.

9. $y = 3\ \text{Arc sin}\,(2x - 3) + 1$.
10. $z = 0{,}7\ \text{Arc tg}\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.
11. $u = \text{arc sin}\,(0{,}7x - 1{,}4)$.
12. $v = 2\ \text{arc cos}\,(2x - 3{,}5) + 1{,}2$.
13. $y = 3\ \text{arc tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$.
14. $v = 3\ \text{arc tg}\,(4x + 4) - 1$.

Hogy kell előkészíteni szerkesztésre az alábbi függvényeket?

15. $y = 0{,}8 \cdot \text{Arc tg}\,(2x - 3) + 0{,}3\ \text{Arc cos}\,(0{,}5x - 4)$.
16. $z = 0{,}3 \cdot \text{Arc sin}\,(3x - 1) - 0{,}2\ \text{Arc cos}\,(3x + 4)$.

Az összetett függvényekre ismertetett szerkesztés (1. § *b) β)*) alapján ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

17. $y = \text{Arc tg}\frac{1}{x}$.
18. $y = \text{Arc sin}\frac{1}{x}$.
19. $y = \text{Arc tg}\frac{1}{x^2}$.

A grafikusan elvégzett (x-szel történő) szorzás és osztás (5. § *a*) 1., illetve 6. §. *a) β*) segítségével ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

20. $y = x \cdot \operatorname{Arc\,cos} x$. 21. $z = \dfrac{\operatorname{Arc\,sin} x}{x}$.

22. $u = \dfrac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x}$. 23. $v = x \cdot \operatorname{Arc\,tg} x$.

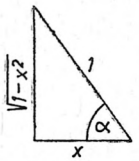
8. § *b) γ)*

1. Igazoljuk, hogy

$$\sin \operatorname{arc\,cos} x \equiv \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Megoldás:

1. Az itt következő feladatokat leghelyesebb egy-egy kis rajzzal kísérnünk; gyakorlásul azonban mindig fordítsuk le a feladatot «magyarra». Jelen példában: mekkora annak a szögnek a sinusa, amelynek a cosinusa x.



81. ábra

A rajz egy egységnyi átfogójú háromszög, melynek egyik befogója x hosszúságú; ekkor az ezen a befogón fekvő α szög az $\alpha = \operatorname{arc\,cos} x$ egyenlet megoldása (ti. ennek a szögnek cosinusa valóban $x = \dfrac{x}{1}$).

Ezen szög sinusa:

$\sin\alpha$: a szemben fekvő befogó és az átfogó hányadosa, ami a Pythagoras-tétel értelmében valóban $\sqrt{1-x^2}$.

Mi az $\alpha = \operatorname{arc\,cos} x$ szöget mint 0 és $\dfrac{\pi}{2}$ közötti szöget értelmeztük. A valóságban azonban α végtelen sok értéket vehet fel, éspedig egy főértéket 0 és α és egy «fő-mellékértéket» 0 és $-\pi$ között; ezenkívül az összes mellékértéket. Ezeknek az α szögeknek a sinusát keressük, így csak a fő- és fő-mellékértékkel kell törődnünk, közülük a főérték sinusa $+\sqrt{1-x^2}$; 0 és π közötti szög sinusa ugyanis bizonyosan pozitív. Ezzel szemben a fő-mellékérték sinusa bizonyosan negatív; a feladat teljes megoldása tehát:

$$\sin \operatorname{arc\,cos} x \equiv \pm\sqrt{1-x^2},$$

míg

$$\sin \operatorname{Arc\,cos} x \equiv +\sqrt{1-x^2}.$$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

2. $y = \cos \operatorname{arc\,sin} x \equiv \pm\sqrt{1-x^2}$.

3. $y \sin \operatorname{arc\,tg} x \equiv \dfrac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

4. $y = \cos \operatorname{arc\,tg} x \equiv \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

5. $y \sin \operatorname{arc\,tg} x \equiv \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

6. $\cos \operatorname{arc\,ctg} x \equiv \dfrac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

7. $\sin \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x} \equiv \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$.

8. $\operatorname{tg} \operatorname{arc\,cos} x \equiv \dfrac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$.

9. $\operatorname{ctg} \operatorname{arc\,sin} x \equiv \dfrac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Igazoljuk, hogy az alábbi függvénynek grafikonja egyenes, és határozzuk meg ezen egyenes jellemző adatait:

10. $y = \sqrt{1+x^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tg}\, x\right)$. 11. $u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,sin}\, x\right)$.

12. $v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,sin}\, x\right)$. 13. $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{tg}\operatorname{Arc\,sin} x$.

14. $y = x \cdot \operatorname{tg}\operatorname{Arc\,ctg} x$. 15. $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{ctg}\operatorname{Arc\,cos} x$.

16. $w = x \cdot \operatorname{ctg}\operatorname{Arc\,tg} x$. 17. $z = \sin(\operatorname{Arc\,sin} x + \operatorname{Arc\,cos} x)$.

18. $u = \sin(\operatorname{Arc\,tg} x + \operatorname{Arc\,ctg} x)$.

19. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cos(\operatorname{Arc\,sin} x - \operatorname{Arc\,tg} x) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Fejezzük ki az alábbi függvényeket mint x (és α) algebrai függvényeit:

20. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,sin} x - \operatorname{Arc\,ctg} x)$. 21. $v = \cos(\operatorname{Arc\,cos} \alpha + \operatorname{Arc\,sin} x)$.

22. $w = \sin(\operatorname{Arc\,tg} \alpha - \operatorname{Arc\,cos} x)$.

23. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$y = \operatorname{Arc\,sin}\cos x \equiv \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad \left(\text{ha } 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Megoldás:

a) Először magyarázzuk meg a feladatot:

Melyik az a szög, amelynek sinusa megegyezik az x szög cosinusával?

Állítás:

$$\text{a } \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ szög!}$$

A megoldást a következő módon célszerű megkeresnünk. Jelöljük a feladat megoldását (a keresett szöget) y-nal: $y = \operatorname{Arc\,sin}\cos x$. Ebből az egyenlőségből $\cos x$-et kifejezve:

$$\sin y = \cos x.$$

$\cos x$-et azonban a pótszögösszefüggés alapján ki tudjuk fejezni egy másik szög sinusával is

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

A két egyenlőség összevetéséből:

$$\sin y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Mivel pedig a feladatkitűzés értelmében a főértéket kell megkeresnünk, ebből azonnal következik, hogy $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Hiszen két szög ugyanazon szögfüggvénye az argumentum *bármely* értékénél csak akkor lehet egyenlő, ha a két argumentum egyezik. Ebből a feladatból egyébként azt a következtetést is levonhatjuk (jó néhány előző feladat is megerősíti ezt), hogy transzcendens függvények segítségével felírt függvénykapcsolatok közül egyesek a valóságban algebrai függvények!

Az ilyen jellegű feladatok megoldásának ez egyébként általános módszere. Felvéve a keresett ismeretlent, úgy alakítjuk át az egyenletet, hogy *mindkét oldal kifejezhető legyen ugyanazon függvénnyel*; ehhez legtöbbször első lépésként az alábbihoz hasonló — részbeni — inverzió vezet el!

Alakítsuk át az alábbi függvényeket x algebrai függvényévé: $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

24. $y = \operatorname{Arc\,cos}\sin x$. **25.** $u = \operatorname{Arc\,ctg}\operatorname{tg} x$.

26. $v = \operatorname{Arc\,tg}\operatorname{ctg} x$. **27.** $z = \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

28. $w = \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

29. Igazoljuk az alábbi azonosságot:

$$y = \sin(2\ \operatorname{Arc\,sin} x) \equiv 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Megoldás:

a) Tekintettel arra, hogy sin Arc sin x és cos Arc sin x értékét az előző feladatok alapján ismerjük, ezekre kell visszavezetnünk fenti feladatunkat is. Ezt könnyen meg is tudjuk tenni a kétszeres szögek szögfüggvényeinek ismeretében.

Jelöljük ugyanis átmenetileg Arc sin x-et z-vel

$$\begin{aligned} z &= \operatorname{Arc\,sin} x \\ y &= \sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z = \\ &= 2\sin \operatorname{Arc\,sin} x \cdot \cos \operatorname{Arc\,sin} x = \\ &= 2x\sqrt{1-x^2}, \end{aligned}$$

ahogy állítottuk.

Fenti transzcendens alakban felírt függvénykapcsolat a valóságban ezek szerint algebrai függvény.

Alakítsuk át az alábbi függvényeket algebrai kapcsolattá:

30. $y = \cos(2\ \operatorname{Arc\,sin} x)$. **31.** $u = \cos(2\ \operatorname{Arc\,cos} x)$:

32. $v = \sin(3\ \operatorname{Arc\,cos} x)$: **33.** $w = \cos(3\ \operatorname{Arc\,sin} x)$:

34. $y = \operatorname{tg}(2\ \operatorname{Arc\,sin} x)$. **35.** $z = \sin(2\ \operatorname{Arc\,tg} x)$.

36. $u = \sin(\operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,tg} 2x)$. **37.** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{Arc\,sin} x - \operatorname{Arc\,cos} x^2)$:

38. $w = \sin(2\ \operatorname{Arc\,cos} 2x - 2\ \operatorname{Arc\,sin} 2x)$.

Számítsuk ki az előző feladatok alapján:

39. sin (2 Arc sin 0,7), **40.** cos [2 Arc sin (—0,3)],

41. tg [2 Arc sin (0,34)]

értékét anélkül, hogy szögfüggvénytáblát használnánk!

42. Számítsuk ki az $y = \sin[2 \operatorname{Arc\,tg} 3x]$ függvény értékét az $x = 0{,}17$ helyen, anélkül, hogy szögfüggvénytáblát használnánk!

43. Számítsuk ki tg (arc sin 0,3 – arc cos 0,3) értékét szögfüggvénytábla használata nélkül.

Írjuk fel α és β algebrai kifejezései segítségével az alábbi összegeket:

44. cos (arc tg α + arc cos β).

45. sin (2 arc cos α – arc tg β).

46. ctg (2 arc sin α – arc ctg β).

47. tg [arc sin $(-\alpha)$ + arc cos $(-\beta)$].

48. z = arc sin x + arc cos α.

Fejezzük ki z-t egyetlen taggal!

Megoldás:

a) Ilyen esetekben a következőképp számolhatunk: a jobb oldal szögfüggvényei z és α segítségével feltétlenül kifejezhetőek. Pl.:

$$\sin z = \sin(\arcsin x + \arcsin \alpha) =$$

$$= \sin(\arcsin x)\ \cos(\arccos \alpha) + \cos(\arcsin x) \cdot \sin(\arccos \alpha) =$$

$$= x \cdot \alpha + \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-\alpha^2} = x \cdot \alpha + \sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2)}.$$

Amiből:

$$z = \arcsin \sin z = \arcsin[x \cdot \alpha + \sqrt{(1-x^2)(1-\alpha^2)}].$$

b) Természetesen abból is kiindulhattunk volna, hogy

$$\cos z = \cos(\arcsin x + \arccos \alpha) = \alpha\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\alpha^2}.$$

Amiből:

$$= \arccos(\alpha\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\alpha^2}).$$

c) tg z segítségével ismét új eredményre bukkantunk volna.
Az előbbi két egyenletből egyébként az

$$\arcsin[x\alpha + \sqrt{(1-\alpha^2)(1-x^2)}] = \arccos[\alpha\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\alpha^2}].$$

érdekes eredmény adódik.

Mutassuk ki, hogy az alábbi – transzcendens függvények segítségével felírt – függvények értelmezési tartományukban algebraiak; határozzuk meg algebrai alakjukat és ábrázoljuk őket:

49. $y = \operatorname{Arc\,sin} x + \operatorname{Arc\,cos} x.$

Megoldás:

a) Az $y = \operatorname{Arc\,sin} x + \operatorname{Arc\,cos} x$ függvény értelmezési tartománya a $-1 \leqq x \leqq 1$ intervallum. (Nincs ugyanis olyan szög, amelynek sinusa vagy cosinusa ezen zárt intervallumon «kívül esne» – azaz abszolút értéke 1-nél nagyobb lenne!)

Az eddigiek alapján határozzuk először meg y egy olyan függvényét, melynek segítségével a jobb oldal egyetlen taggá vonható össze. Ebből a szempontból bármelyik szögfüggvény megfelel. Legegyszerűbb pl.

$$z = \sin y = \sin\{\operatorname{Arc\,sin} x + \operatorname{Arc\,cos} x\} =$$

$$= \sin \operatorname{Arc\,sin} x \cdot \cos \operatorname{Arc\,cos} x + \cos \operatorname{Arc\,sin} x \sin \operatorname{Arc\,cos} x =$$

$$= x \cdot x + \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = x^2 + (1-x^2) \equiv 1.$$

Tehát:

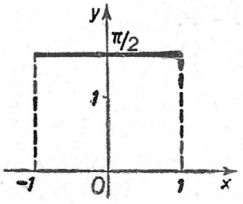
$$y = \operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}; \quad \text{illetve} \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

b) A fenti lehetséges értékek közül azonban csak az $y = \frac{\pi}{2}$ jöhet tekintetbe. Az eredeti feladatból kiolvasható ugyanis, hogy

$$y_{\max} \leqq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 1 \cdot \pi;$$

$$y_{\min} \geqq -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 1 \cdot \pi.$$

Az Arc sin x függvény értéktartománya ti. a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, az Arc cos x függvényé pedig a $[0, \pi]$ zárt köz, s így y-é legfeljebb a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ zárt köz lehetne. Ezt pedig csak a $k = 0$ választás mellett tudjuk eredményünkben kielégíteni. Azaz $y \equiv \frac{\pi}{2}$; ez pedig az «x-tengellyel» párhuzamos egyenes!



82. ábra

50. $y = \operatorname{Arc\,tg} x + \operatorname{Arc\,ctg} x.$

51. $y = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{Arc\,tg} x.$

Állapítsuk meg az eddig felírt, illetve kimutatott azonosságok segítségével, hogy x mely értékeinél van értelmük az alábbi azonosságoknak:

52. $\operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{x} \equiv \operatorname{Arc\,sec} x.$

53. $\operatorname{arc\,sin} \sqrt{1-x^2} \equiv \operatorname{arc\,cos} x.$

54. $\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \equiv \operatorname{arc\,sin} x.$

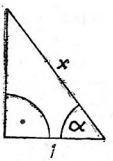
55. $\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} \equiv \operatorname{Arc\,ctg} x.$

Megoldás:

(ad. 52.) A bal oldal csak $\left|\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ esetére van értelmezve, ugyanígy a jobb oldal is.

Más szóval, a fenti azonosságnak értelme csak a $-\infty \leqq x \leqq -1$, illetve az $1 \leqq x < \infty$ szakaszokon van. Itt azonban érvényes is, feltéve, hogy a végtelen sokértékű függvények mindkét oldalán mindig az egymásnak megfelelőeket vesszük. Erről pl. úgy győződhetünk meg, hogy mindkét oldalnak vesszük a cosinusát:

$$\frac{1}{x} \equiv \cos \operatorname{Arc\,sec} x \qquad (|x| \geqq 1).$$



83. ábra

A jobb oldal értékét egy olyan derékszögű háromszög segítségével számíthatjuk ki, amely háromszög α szögének épp x a secansa, vagyis amelyre igaz, hogy $\alpha = \operatorname{Arc\,sec} x$, illetve $x = \sec \alpha$.

Az ábrából aztán azonnal kiolvashatjuk, hogy az α szög cosinusa valóban $\frac{1}{x}$.

Qu. e. d.

Igazoljuk az előző feladatokban levezetett összefüggések segítségével az alábbi két egyenlet helyességét:

56. $2 \operatorname{Arc\,tg} 10 + \operatorname{Arc\,sin} \frac{20}{101} = \pi.$ **7.** $4 \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$

8. § b) δ)

1. Egy repülőgép üzemi sebessége 640 km/óra. Az $\overline{AB}$ távolságot kell átrepülnie, eközben egy 80 km/óra sebességű, az $\overline{AB}$ egyeneshez x radiánnyi szög alatt hajló hátszelet kap.

Milyen y szög alatt kell elfordítania a pilótának a gépet, hogy az éppen az $\overline{AB}$ egyenes mentén haladjon?

2. Egy csónak nyugvó vizen 28 km/óra sebességgel halad. Az x m/perc sebességű folyón a folyási irányhoz milyen y szög alatt hajlóan kell eveznünk, hogy éppen merőlegesen szeljük át a folyót? Ábrázoljuk az összefüggést!

3. Két egymáshoz x radiánnyi szögben hajló erő, a függőlegesben támadó 2480 kg-os, és a 4720 kg-os erő hat a testre. Mekkora lesz az y eredő erő, és a függőlegeshez milyen z szög alatt hajlik? Ábrázoljuk az összefüggéseket!

4. Mérjük a $v_0 = 240$ m/mp kezdősebességgel elhajított test x becsapódási távolságait. Elhanyagolva a légellenállás hatását, adjuk meg az elhajítás y szögét mint a becsapódás függvényét. Ábrázoljuk grafikusan az összefüggést!

5. Körszelet alakú bütykőt kell készítenünk, amelynek adott legnagyobb húrja: $b = 2$ cm. Adjuk meg a bütykön levő körív y hosszát mint az x sugár függvényét. Ábrázoljuk az összefüggést grafikusan!

Megoldás:

a) (L. az ábra jelöléseit!) Az y és x közötti összefüggést közvetlenül nem tudjuk megadni. Ha ellenben az ábrán berajzolt α szöget mint segédváltozót – ún. paramétert – felhasználjuk, segítségével könnyen fel tudunk írni két egyenletet. Ezek máris szolgáltatják az y és x közötti összefüggést paraméteres alakban. A két egyenletből azután egyenletmegoldással α-t könnyen kiküszöböljük.

b) A derékszögű háromszögben

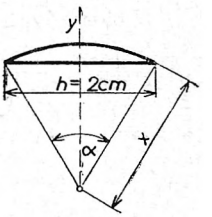
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

A szög geometriai definíciójából

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{2} : x = \frac{y}{2r}.$$

Az első egyenletből $\frac{\alpha}{2} = \operatorname{Arc}\sin x$,

amit a másodikba helyettesítve: $y = 2\alpha = 2 \operatorname{Arc}\sin \frac{1}{x}$.

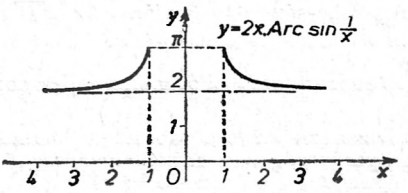


84. ábra

c) y csak a $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ szakaszon van definiálva; azaz csak akkor, ha $|x| \geq 1$ (ez geometriailag nyilvánvaló; azt mondja, hogy a kör egyetlen húrja sem lehet nagyobb mint az átmérője!)

A függvény páros (ti. $[-2x] \operatorname{Arc}\sin \left(\frac{1}{-x}\right) = 2x \operatorname{Arc}\sin \frac{1}{x}$), ezért elegendő pozitív x-ekre szorítkozni. $x = 1$ helyen $y = \pi$. A további vizsgálathoz néhány pontot kell felvennünk, és geometriai alapon a görbe jellegét eldöntenünk. Nyilvánvaló, hogy az ordináta monoton csökkenni fog növekvő x-szel (növekvő sugár esetén ti. az ív mind közelebb kerül a húrhoz). Az is nyilvánvaló, hogy ha x minden határon túl nő, a húr és ív egybeesik;

tehát $x \to \infty$ esetén $y \to 2$. (L. a 85. ábrát).



85. ábra

8. § *c)*

1. Oldjuk meg a $3 \sin x - \cos 2x - 1 = 0$ egyenletet.

Megoldás:

a) A szögfüggvények közötti összefüggés segítségével mindegyik szögfüggvényt ki tudjuk fejezni a $\sin x$ segítségével:

$$3 \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) - 1 = 0;$$
$$3 \sin x - (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) - 1 = 0;$$
$$3 \sin x - 1 + 2 \sin^2 x - 1 = 0;$$
$$2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

b) Ebből az egyenletet kielégítő $\sin x$ értéket számítani tudjuk:

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4};$$

$$(\sin x)_1 = \frac{1}{2};$$

$$(\sin x)_2 = -2.$$

Utóbbi értéknek valós x szög nem felelhet meg, így az eredeti egyenlet megoldáscsoportja:

$$x = \operatorname{arc\,sin}\, 0{,}5 = \frac{\pi}{6}; \qquad \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}; \qquad \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \qquad \frac{5\pi}{6} + 2n\pi.$$

2. Oldjuk meg az $(\operatorname{Arc\,sin} x)^2 - 3 \operatorname{Arc\,cos} x + 6 = 0$ egyenletet.

Megoldás:

a) $$\operatorname{Arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,sin} x$$

(lásd 8. § *b) γ)* 49. feladatot)

Ennek alapján az egyenlet már könnyen megoldható.

3. Oldjuk meg az $(\operatorname{Arc\,tg} x)^2 - 5 \operatorname{Arc\,ctg} x = 0$ egyenletet.
4. Oldjuk meg az $\operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,tg} 4$ egyenletet!
5. Oldjuk meg az $\operatorname{Arc\,tg} 3x = \operatorname{Arc\,sin} x - 1$ egyenletet!
6. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x + \cos x = 0$ egyenletet.
7. Oldjuk meg a $\operatorname{tg} x + \sin x = 0$ egyenletet.
8. Oldjuk meg az $\operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,ctg} \frac{1}{3}$ egyenletet.

Megoldás:

1. Nyilvánvalóan az x értéket kell kifejeznünk az egyenletből; ez az $\operatorname{Arc\,sin} x$ függvény inverzének segítségével egyszerűen megy:

$$x = \sin\left[\operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \sin \operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{2} \cdot \cos \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3} + \cos \operatorname{Arc\,cos} \frac{1}{2} \sin \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3}.$$

Felhasználva a feladatok között levezetett azonosságokat:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2\sqrt{10}} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \simeq$$

$$\simeq 0{,}8225 + 0{,}1579 = 0{,}9804.$$

9. §. EXPONENCIÁLIS ÉS HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK ÉS INVERZEIK

a) Exponenciális függvény

Exponenciálisnak azt a függvényt hívjuk, amelyben a független változó a kitevőben (az exponensben) *szerepel.* Az a alapnak eddig csak racionális hatványait értelmeztük. A 10. §-ban azonban látni fogjuk, hogy sorozatok határértéke segítségével az $a>0$, $\neq 1$ *alapnak bármely valós hatványát definiálni tudjuk.* Mivel a logaritmus fogalmával már az eddigiekben is megismerkedtünk, egyébként sem okoz nehézséget az a^x közelítő kiszámítása, bármilyen valós számot jelentsen is x.

Megjegyzendő, hogy *exponenciális hatványfüggvényről* beszélünk, ha az x az alapban és a kitevőben is előfordul; ilyen pl. az $y = (\operatorname{tg} x)^x$. Ezekkel itt nem foglalkozunk!

α) **Ábrázolás, transzformáció.** Az $y = a^x$ exponenciális függvények mindannyian átmennek a (0,1) ponton. Válasszuk ki közülük azt az egyet, amelyet az $y = 1+x$ egyenes érint (azaz csak egyszer és nem többször metsz). Ennek az alapszámát e-vel jelöljük, és a természetes logaritmus alapjának hívjuk. Ez az $y = e^x$ függvény különös figyelmet érdemel. A fizikában és technikában exponenciális jellegű folyamatok leírására mindenütt ezt az $y = e^x$ függvényt használjuk.

β) **Alapösszefüggések.** Az exponenciális függvények alapvető tulajdonságát a következő *két, ún. függvényegyenlettel* jellemezhetjük:

1) $$E(x+y) = E(x)\cdot E(y).$$

Azaz a független változó két értékének összegéhez a függvényértékek szorzata tartozik.

2) $$E(x\cdot y) = [E(x)]^y = [E(y)]^x.$$

A független változó két értékének szorzatához pedig az egyik tényezőhőz rendelt függvényértéknek a másik tényezőre (mint kitevőre) emelt hatványa tartozik.

γ) **Gyakorlati alkalmazások.** A gyakorlatban a következő problémákkal kapcsolatosan találkozunk az exponenciális függvénnyel:

Csillapított és túlcsillapított rezgések; olyan folyamatok, ahol a kilépő energia a befutó energiával, a kilépő anyagmennyiség a befutó anyagmennyiséggel arányos stb. Ezek leírása exponenciális függvénnyel történik.

b) A logaritmusfüggvény

Az $y = a^x\,(a>0)$ exponenciális függvény inverze a logaritmusfüggvény; az ún. *a alapú logaritmus;* szokásos jele:

$$y = {}^a\log x.$$

y jelenti azt a kitevőt, amelyre az a alapot emelve, a megadott x mennyiséget kapjuk.

A trigonometrikus függvények inverzéhez hasonlóan, ezzel is sok baja van a kezdőnek. Mindezeket ismét könnyen elkerüljük, ha «lefordítjuk» a log szócskát és

egy-két megjegyzést vésünk emlékezetünkbe. *A logaritmus kitevőt jelent;* ${}^a\log b$ azt a *kitevőt* jelenti, amelyre a-t felemelve b-t kapjuk.

Ebből következik pl. hogy $a^{{}^a\log b} = b$. Most ugyanis a-t valóban felemeltük erre a bizonyos kitevőre, logaritmusra — tehát b-t kell kapnunk.

α) **Ábrázolás: alapösszefüggések.** A következő *négy függvényegyenlet* adja meg a logaritmusfüggvény jellegzetes sajátságait és kapcsolatát az exponenciális függvénnyel:

$$\log(x \cdot y) \equiv \log x + \log y; \qquad \log x^y \equiv y \cdot \log x;$$

$$a^{{}^a\log x} \equiv x; \qquad {}^a\log a^x \equiv x.$$

β) **Gyakorlati alkalmazások** (l. a feladatoknál).

c) Hiperbolikus függvények és inverzeik

α) **Definíciók**

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$y = \operatorname{th} x \equiv \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Az elnevezések «első fele» onnét származik, hogy — mint látni fogjuk — például az $y = \operatorname{sh} x$ függvény sok tekintetben hasonlóan viselkedik a sin x függvényhez, a ch x a cos x-hez stb. (főleg ami a függvények egymásközti kapcsolatát illeti).

Másrészről a hiperbolához fűződő kapcsolatokra utal az elnevezés. Ezen kapcsolatok nagy részét csak később ismerjük meg. A 9. § *c) γ)* 34. feladat azonban már mutatja, hogy szoros a kapcsolat.

A hiperbolikus függvények inverzei:

Az $y = \operatorname{sh} x$ függvény inverze $y = \operatorname{ar\,sh} x$ (amit az e^x inverzével is kifejezhetünk):

$$\operatorname{ar\,sh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Az $y = \operatorname{ch} x$ függvény inverze:

$$y = \operatorname{ar\,ch} x \equiv \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right).$$

Az $y = \operatorname{th} x$ függvény inverze:

$$y = \operatorname{ar\,th} x \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

β) **Ábrázolásuk** (l. a feladatoknál).

γ) **Alapösszefüggések.** A hiperbolikus függvények — a pótszögösszefüggésektől eltekintve — szinte kivétel nélkül valamennyi, a trigonometrikus függvényekre

érvényes egyenlőséghez analóg relációkat elégítenek ki; esetleg bizonyos előjeleltéréssel.

δ) **Alkalmazások.** (l. a feladatoknál).

Feladatok:

9. § *a) α)*

1. Ábrázoljuk az $y = 2^x$ függvényt értéktáblázat segítségével, továbbá annak meggondolásával, hogy 1-nél nagyobb alapnak növekvő kitevővel nő a hatványa!

2. Ábrázoljuk az alábbi exponenciális függvényeket:

$$y = 3^x; \quad u = 4^x; \quad v = 7^x; \quad w = 10^x;$$

egy ábrában!

3. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$y = 0{,}1^x; \quad u = 0{,}3^x; \quad w = \left(\frac{1}{4}\right)^x;$$

egy ábrában!

Figyeljük meg az ábrákon, hogy a felírt exponenciális függvények valamennyijének értelmezési tartománya $a - \infty < x < \infty$ intervallum, értékkészlete a $0 < y < \infty$ intervallumot «teljesen betölti». (Ezt a 10. §-ban igazolni is fogjuk tudni!)

4. *Könnyen belátható, hogy az*

$y = a^x$ *függvény* *monoton növekvő, ha* $a > 1$,
állandó, ha $a = 1$,
monoton csökkenő, ha $a < 1$. Igazoljuk ezt!

5. Igazoljuk, hogy az $y = a^x$ és az $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ függvények egymásnak az y tengelyre vonatkoztatott tükörképei!

6. Igazoljuk, hogy a különböző alapú exponenciális függvények egymásból lineáris transzformációval származtathatóak!

Megoldás:

a) Válasszunk ki két különböző alapú exponenciális függvényt, pl. az $y = a^x$ és $y = b^x$ függvényt. $(a \neq b.)$

Az az állításunk, hogy az $y = b^x$ függvény átírható a alapú exponenciális függvénnyé. Ehhez csak azt kell meggondolnunk, hogy a b *szám* bizonyosan *felírható mint a-nak valamely c-edik hatványa.* a és b is pozitívok; márpedig az exponenciális görbék ábrázolásánál láttuk, hogy az értékkészlet a $0 < y < \infty$ nyílt intervallumot kitölti. Bizonyosan található tehát egy $x = c$ érték, amelyre

$$a^c = b, \text{ hacsak } a \text{ és } b \text{ pozitívok.}$$

b) Ezzel az $y = b^x$ függvény így is írható:

$$y = b^x = (a^c)^x = a^{cx},$$

hiszen hatványt úgy hatványozunk, hogy a kitevőket összeszorozzuk.

Az $y = b^x = a^{cx}$ görbe pedig az $y = a^x$ görbéből az x tengely irányában történő c-szeres zsugorítással származtatható, ahogy állítottuk!

c) c konkrét értékének megállapításával könnyen elkészülünk. c ugyanis az a szám, amelyre a-t felemelve b-t kapjuk, azaz $c = {}^a\log b$; a log-függvény definíciója szerint!

9. § a) β)

1. Ábrazoljuk az $y = e^x$ függvényt táblázat segítségével.
2. Ábrázoljuk az $y = 4^{3x-2} + 5$ függvényt, kiindulva a 4^x függvényből, transzformációval.

Készítsük elő transzformációval történő ábrázolásra (esetleg ábrázolhatjuk is) az alábbi függvényeket:

3. $y = 2^{2x-3} + 1$.
4. $u = 3^{3x-2}$.
5. $y = e^{2x-1} + 2$.
6. Ábrázoljuk az $y = 3 \cdot 9^{2x-2}$ függvényt.

Megoldás:

a) $$y = 3^x(3^2)^{2x-2} = 3^x \cdot 3^{4x-4} = 3^{5x-4}.$$

Utóbbi függvényt már könnyű ábrázolni, mert az $y = 3^x$ függvényből származtatható, transzformációval!

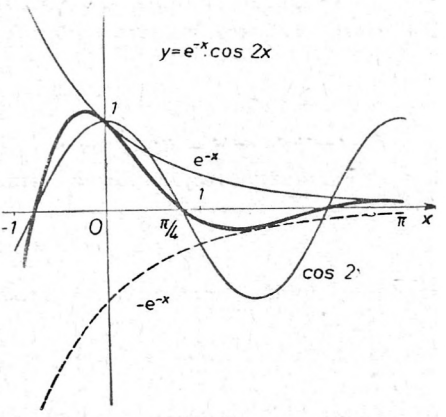
Ábrázoljuk az $y = e^{-x} \cdot \cos 2x$ függvényt, értéktáblázatot véve fel. Gondoljuk meg, hogy milyen jellegű a görbe, és használjuk ezt fel görbe szerkesztésénél.

Megoldás:

a) függvény 0-helyei megegyeznek a második tényező zérushelyeivel, hiszen az első tényező nem veszi fel a 0 értéket.

Ezek szerint 0 helyek a $\frac{\pi}{4}$ páratlan számú többszörösei.

Másrészről a második tényező legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke -1. Ezek szerint a görbének egyetlen ordinátája sem lehet nagyobb, mint e^{-x} megfelelő ordinátája, de kisebb sem, mint $-e^{-x}$ megfelelő ordinátája. Ott, ahol $\cos 2x = 1$, illetve $\cos 2x = -1$, a görbe és e^{-x}, illetve $-e^{-x}$ ordinátája épp egyezik. Itt sem metszheti azonban az $e^{-x} \cdot \cos 2x$ görbéje az e^{-x}, illetve $-e^{-x}$ görbét, hiszen az előbbi mindig a két utóbbi görbe között jár, tehát e helyeken érinti görbénk az e^{-x}, illetve a $(-e^{-x})$ görbét!



86. ábra

A szerkesztéshez eszerint az értéktáblázat megadta értékpárokon kívül elsősorban az e^{-x} és $-e^{-x}$ görbéket kell felhasználnunk, a cos $2x$ zérushelyeit, továbbá az $x_k = 0 + \frac{2k\pi}{2}$ helyeket, ahol cos $2x$ a $+1$, és az $x_n = \frac{\pi}{2} + \frac{n2\pi}{2}$ helyeket, ahol cos $2x$ épp a -1 értéket veszi fel.

Szerkesszük meg az alábbi görbéket:

8. $u = e^{-3x} \cdot \sin 0{,}5\,x$. 9. $v = e^{-\frac{1}{8}x} \cdot \cos\frac{3}{4}x$.

10. $w = e^{\frac{1}{4}x} \sin 3x$.

11. Ábrázoljuk a függvény tulajdonságainak vizsgálata és kisegítő értéktáblázat alapján az $y = 4\cos^2 x$ függvényt!

12. Ábrázoljuk az $y = \frac{e^x - 1}{x}$ függvényt az $u = e^x - 1$ függvény és a 6. § *a) β)* 1. feladatban megismert szerkesztő módszer alapján. Sűrítsük a pontokat az $x = 0$ hely közelében, hogy felismerjük itt a függvény viselkedését!

13. Ábrázoljuk az $y = (e^{-x})^x$ függvényt értéktáblázat segítségével. Gondoljuk át, hogy a függvény monoton jellegű-e, s ha igen, monoton csökkenő avagy monoton növekedő?

14. Ábrázoljuk az $u = x \cdot e^{-x}$ függvényt értéktáblázat segítségével, illetve az e^{-x} görbéből, az x-szel történő szorzás grafikus úton történő elvégzésével (1. 5. § *a)* 1.).

15. Ábrázoljuk az $y = e^{-x^2}$ függvény néhány pontját az 1 §. *b) β)*-ban ismertetett szerkesztés segítségével, és kössük össze görbévé.

16. Ábrázoljuk az $y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$ függvényt értéktáblázat segítségével; keressük meg a 0-helyet, és gondoljuk át, hogy a függvénygörbe milyen jellegű (milyen a viselkedése), ha $x \to \infty$, illetve ha $x \to -\infty$.

17. Az $y = k \cdot a^x$ függvényben x-nek egymás után olyan értékeket adunk, amelyek ebben a sorrendben egy d differenciájú számtani sort alkotnak. Milyen összefüggés fog fennállni az y értékek sorozatában az egyes y értékek között? Milyen sort kapunk? (k tetszés szerinti valós szám; $a > 0$).

9. § *a) γ)*

1. Egy ohmos ellenállást és önindukciós tekercset tartalmazó *áramkörben* a bekapcsolt E = const feszültség hatására a következő törvény szerint változik az áramerősség:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{L}}\right).$$

Ábrázoljuk az $i = i(t)$ függvényt $R = 2(\Omega)$; $L = 2{,}8\ (Hy)$, $E = 150\ (V)$ esetén!

2. Egy *csillapított rezgőkörben* az áramerősség és az idő között a következő kapcsolat áll fenn:

$$i = i(t) = A \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} \cdot \cos(\omega_0' t - \varphi),$$

itt A a $t = 0$ időpillanatban fellépő áramerősség: a kondenzátor kezdeti töltésétől függ.

$$\left(\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}\right); \quad \omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Ábrázoljuk a függvényt $A = 1{,}3$; $R = 80$; $C = 16 \cdot 10^{-6}$; $L = 3 \cdot 10^{-2}$ esetén.

3. A *statisztikában* fontos szerepet játszik a következő függvény:

$$f(T) = N \cdot e^{\frac{u}{kT}}$$

Ábrázoljuk a függvényt $N = 1$; $\frac{u}{k} = 150$ választással!

4. A *szíjsúrlódás* egyenlete: $T_1 = T_2 \cdot e^{-\mu.\alpha}$. Itt T_1 jelenti a rögzített dob egyik oldalán, T_2 a másik oldalán lefutó ágban a húzóerőt, μ a súrlódás tényezőjét, α pedig annak az ívnek radiánokban kifejezett mérőszámát, melyen a kötél a dobra fekszik.

$\mu = 0{,}4$ esetén ábrázoljuk $\frac{T_1}{T_2}$ értékét az α függvényében!

9. § b) α)

1. Ábrázoljuk az $y = {}^{10}\log x$ függvényt értéktáblázat segítségével, továbbá annak meggondolásával, hogy az $x = 0$ helyen függőleges aszimptotával, az $x = 1$ helyen 0-hellyel rendelkezik a függvény. Gondoljuk meg, hogy monoton-e!

2. Mutassuk meg, hogy az $y = {}^{a}\log x$ és az $u = {}^{b}\log x$ függvények lineáris transzformációval származtathatók egymásból!

Megoldás:

a) Az igazolás alapgondolata nyilvánvalóan az, hogy az $u = {}^{b}\log x$ felírható az a alapú logaritmusfüggvény segítségével is (azaz y segítségével!). u jelenti azt a kitevőt, amelyre b-t emelve, y pedig, amelyre a-t emelve x-et kapunk:

$$a^y = x; \qquad \text{illetve} \qquad b^u = x.$$

b maga azonban, ahogy azt a 9. § *a)* α) 6. feladatból tudjuk, így írható:

$$b = a^{{}^{a}\log b};$$

ezzel $x = a^y$; $x = b^u = (a^{{}^{a}\log b})^u = a^{u\,{}^{a}\log b}$.

Legutolsó egyenletünket visszaírva logaritmus alakra:

${}^{a}\log x = u \cdot {}^{a}\log b$. (Ti. az előbbi egyenletben valóban úgy kaptuk meg az x-et, ha a-t $u \cdot {}^{a}\log b$ kitevőre emeltük!)

Az $u = {}^{b}\log x$ az $y = {}^{a}\log x$ függvényből ezek szerint az y-tengely irányában $\log b$ arányú nyújtással valóban származtatható:

$$\text{ti. } u = {}^{b}\log x = \frac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log b}; \qquad \text{illetve} \qquad \frac{u}{\frac{1}{{}^{a}\log b}} = {}^{a}\log x.$$

Ábrázoljuk az $y = {}^{\frac{1}{10}}\log x$ függvényt! Van-e összefüggés az $y = {}^{10}\log x$ (amely $\log x$, illetve néha $\lg x$ jelöléssel szerepel) és a ${}^{\frac{1}{10}}\log x$ grafikonja között?

4. Ábrázoljuk az $y = {}^{e}\log x$ (szokásos jelöléssel: $y = \ln x$) függvényt.

5. Ábrázoljuk az $y = {}^{a}\log x$ függvényt

$$a = \frac{1}{3}; \qquad a = 3;$$

$$a = \frac{1}{5}; \qquad a = 5;$$

$$a = \frac{1}{e}; \qquad a = e^2$$

esetén, egy ábrában, vázlatosan!

Készítsük elő az alábbi függvényeket ábrázolásra:

6. $y = {}^a\log(3x-4); \qquad (a = 3)$

7. $y = \ln(2x-1);$

8. $y = \log(3x+2).$

9. Határozzuk meg $y = {}^z\log 4^x$ értékét, $x = 3$; $x = 5$ és $x = a$ esetén.

10. Igazoljuk, hogy az $y = \ln(e^{3x-4})$ függvény egyenest ábrázol. Határozzuk meg az egyenes jellemző adatait!

11. Írjuk át az $y = e^{{}^b\log x}$ függvényt racionális alakba, és aztán ábrázoljuk $b = 3$ választás mellett.

12. Írjuk át az $u = {}^c\log b^x$ függvényt racionális alakba, és aztán ábrázoljuk $c = 4$; $b = \frac{1}{2}$ választás mellett.

13. Szerkesszük meg az $y = e^{\frac{1}{x}\log x}$ függvénygörbét, kiindulva az $y = \ln x$ függvény görbéből, a grafikus szorzásról (1. 5. § *a)* 1.) tanultak felhasználásával!

14. Hogyan kell választanunk az $y = {}^a\log x$ függvényben az a alapot, hogy grafikonja egy adott $P(\xi,\eta)$ ponton átmenjen, ha $\xi > 1$; $\eta > 0$; illetve ha $0 < \xi < 1$; $\eta < 0$?

15. Ábrázoljuk az $y = \ln\sin x$ görbét a függvény vizsgálata és kisegítő értéktáblázat alapján!

16. Ábrázoljuk az előző feladathoz hasonlóan az $y = \ln \operatorname{tg} x$ függvényt!

17. Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{\ln x}$ függvényt a függvénytulajdonságok vizsgálata, a monotonitás figyelembevétele és kisegítő értéktáblázat segítségével!

18. Ábrázoljuk az $y = {}^z\log 3$ függvényt! Mi a kapcsolat az előző feladatban szereplő $y = \frac{1}{\ln x}$ és az ${}^z\log 3$ függvény között?

19. Ábrázoljuk az $y = {}^z\log x$ függvényt! Keressük meg a kapcsolatot az előző (13.) feladat függvénye és a most megadott között!

20. Szerkesszük meg az előző grafikonból kiindulva [és az x-szel történő grafikus szorzást felhasználva?] az $y = {}^z\log x^2$ függvény görbéjét!

9. § *b) β)*

1. *Koncentrikus kábelben* a belső vezető sugara legyen r, a külső, hengeres vezető belső sugara R. A köztük levő szigetelőhengerben ébredő maximális térerősség:

$$E_m = \frac{V}{r \cdot \ln \frac{R}{r}}$$

(amely a belső vezető felületénél lép fel).

Az $$y=\frac{E_m \cdot R}{V}; \qquad x=\frac{r}{R}$$

helyettesítéssel élve, igazoljuk, hogy az egyenlet a következőbe megy át:

$$y=-\frac{1}{x \ln x}.$$

Ábrázoljuk ezt a függvényt!

Rajzoljuk meg az $E_m=f(r)$ függvényt, ha $R=0{,}6$ cm; $V=1000$ V.

2. Az átviteltechnikában a szűrőméretezésnél a következő függvény gyakran szerepel:

$$f(Z)=\ln \frac{R+Z}{2\sqrt{R \cdot Z}}.$$

Ábrázoljuk a függvényt $R=4$; $R=160$; $R=2500$ (Ω) értékek esetén.

3. *A szűrőméretezés* másik gyakran használt képlete:

$$\gamma=\frac{1}{2} \ln \frac{\omega^2}{\omega^2-1}.$$

Ábrázoljuk a $\gamma=f(\omega)$ függvényt.

4. *Az emberi érzékszervek alaptulajdonsága, hogy az érzet erőssége és az inger nagysága (amit pl. fizikai energiával mérhetünk) közötti összefüggés logaritmikus. Ha tehát az ingert x-szel, az érzetet y-nal jelöljük, közöttük ilyen alakú az összefüggés: $y=c \cdot \ln x$, ahol c fizikai és «személyi» állandó!*

Az elektromos világítótestre kapcsolt feszültség: U és az általa létesített inger: x között a következő összefüggés áll fenn: $x=d \cdot U^2$, ahol d arányossági faktor.

Határozzuk meg az érzet-feszültségfüggvényt, azaz $y=f(U)$-t, és ábrázoljuk $c=10$; $d=3{,}6$ értékek mellett.

* A fizikában és az elektrotechnikában nagyon sok olyan mennyiség szerepel, amelynek logaritmusa is fizikailag értelmezett mennyiség. Valamely szám logaritmusának értéke azonban nemcsak magától a számtól, hanem a logaritmusrendszer alapjául választott alapszámtól is függ – azaz nem «szigorúan dimenziómentes». A fizikában és az elektrotechnikában viszont az egységet, amelyben a fizikailag értelmezett mennyiségeket mérjük, mindig ki szoktuk tenni jelzőként a mennyiség mérőszáma után. Ezért tehát azoknál a mennyiségeknél, ahol a logaritmus is értelmezett fizikailag, érthetően az volt az elektrotechnikusok törekvése, hogy a mértékszámot a logaritmusrendszer alapszámától függetlenítsék. Ezért keresni kezdték a logaritmus egy *olyan felírási módját, ahol nem a mérőszám, hanem az őt befolyásoló egység függ az alapszám megválasztásától.*

Ilyen felírási módot hamarosan találtak is. A probléma megoldására lényegében a *logaritmikus skála vezette rá* az elektrotechnikusokat (gondoljunk arra, hogy pl. a logarlécen látható logaritmikus skálákról nem lehet eldönteni, hogy az alapszám milyen volt). Mi először a megoldást ismerjük meg, aztán térünk rá a logaritmikus skála ismertetésére.

Jelentse tehát x azt a számot amelynek logaritmusát keressük, T egy *tetszés szerinti*, A pedig egy gyakran használt logaritmus-alapszámot. Tudjuk, hogy

$$^{A}\log x=\frac{^{T}\log x}{^{T}\log A},$$

amiből: $$^{(T)}\log x=^{A}\log x \cdot {}^{(T)}\log A.$$

A legutolsó képletben T-t azért tettük zárójelbe, mert tetszés szerinti lévén, el szokták hagyni. Mármost ebben a képletben *a fizikusok épp a* $^{(T)}\log A$ *tényezőt tekintik egységnek (függetlenül T-től), és a következőképp nevezik:*

ha $A=2$, akkor $^{(T)}\log A=1$ oktáv,
ha $A=10$, akkor $^{(T)}\log A=1$ dekád $=100$ cD,
ha $A=\sqrt{10}$, akkor $^{(T)}\log A=1$ B $=1$ bel $=\frac{1}{2}$ D,
ha $A=e$, akkor $^{(T)}\log A=1$ N $=1$ neper.

Hogy most már – természetesen csak látszólag – teljesen függetlenek vagyunk az alapszám megválasztásától, azt a következő kis példán láthatjuk be:

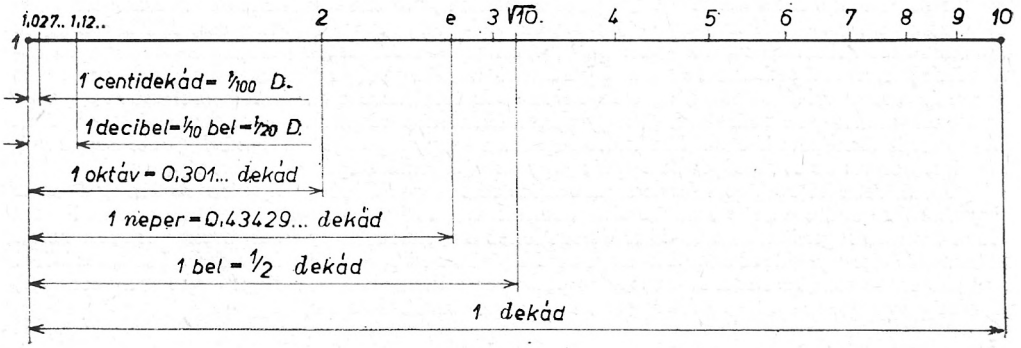
$$\log 2 = {}^{(T)}\log 2 = {}^{10}\log 2 \cdot \text{dekád} = 0{,}301\ldots \text{ D.},$$

ill. $$\log 2 = {}^{(T)}\log 2 = \ln 2 \cdot {}^{(T)}\log e = 0{,}693\ldots \text{ neper} \cong 0{,}693 \text{ N.}$$

Most tehát 2 logaritmusa bármely T alapra vonatkoztatva, mindig 0,301 dekád, ill. 0,693 N. A valóságban persze az egység, a dekád, ill. neper nagysága függ az alapszámtól, T-től; ugyanis a dekád pl. ${}^{T}\log 10$, azaz értéke T-vel változik.

A logaritmusskála konstrukciójához először gondoljuk át a közönséges skála (számegyenes) felvételét. Utóbbin két alappontot jelöltünk ki: a kezdőpontot ($t=0$) és az egységpontot ($t=1$); ezzel egyszersmind az egységet is felvettük. Ezek után minden számnak meg tudjuk feleltetni az egyenes egy pontját és viszont. A logaritmikus skála kezdőpontja nyilván az $x=1$ pont lesz; ennek ugyanis bármely logaritmusrendszerben 0 a logaritmusa. Az egység felvétele – ezzel együtt az egységpont felvétele – a következő teendőnk. Itt csak azért kell megállapodnunk abban, hogy az egység dekád, neper, bel stb. legyen-e, hogy tudjuk: az egységponthoz az $x=10$, az $x=e$; az $x=\sqrt{10}$ stb. értékét írjuk-e? A különböző logaritmusskálák ti. egymásba nyújtással átmennek, s így a kész skálán az egységpont nem kikereshető – a logaritmusrendszer alapszámától a skála független. Ellenben az egység hosszának megválasztásával rendelkeztünk végeredményben a T felett. (Feleakkora egység megfelel a T négyzetre emelésének stb.) Az egységpont felvétele után már minden számnak megfeleltethetünk egy pontot a logaritmikus skálán és viszont. Pl. $\log 2 = 0{,}301$ D, – ha tehát az egységpont alá az $x=10$ értéket írtuk, akkor a 0,301 egységnyire a kezdőponttól levő pont alá az $x=2$ értéket írjuk stb. A skála konstrukciójából egyébként világos, hogy az az $x=0$ pontot nem tartalmazza. Ha tehát egy logaritmikus és egy közönséges vagy két logaritmikus skálából koordinátarendszert készítünk, akkor a skálák természetesen nem a «tengelyeket», hanem azokkal párhuzamos egyeneseket jelenthetnek csak. (Kétszer logaritmus koordinátarendszerben ábrázolt függvény zérushelyeit pl. a grafikonból ezért nem is lehet kiolvasni.)

Az alábbi ábra világossá teszi az eddig elmondottakat.



87. ábra

Meg kell még jegyeznünk, hogy a bel tizedrészét, az ún. decibel-t (dB) és a dekád századrészét, az ún. centidekádot (cD) is gyakran használják egységként.

Gyakran használják ezenkívül a gyakorlatban a «logaritmikus távolság» fogalmát is a következő értelemben:

b «1,8 logaritmikus távolságban van» a-tól, ami annyit jelent, hogy ${}^{a}\log b = 1{,}8$. Itt tehát mindig az alappontot, amelytől mért távolságról beszélünk, használjuk fel a logaritmikus rendszer alapszámául.

5. *a)* Adjuk meg a dekád, neper, bel és oktáv közötti átszámítási faktorokat:
b) Adjuk meg 2, 3, 5 és 7 logaritmusát a fent felsorolt egységekben.

Megoldás:

a) A legegyszerűbb a Dekád és bel közötti összefüggés. Ugyanis

$$1\ \mathrm{D} = {}^{T}\log 10 = 2 \cdot {}^{T}\log \sqrt{10} = 2\ \mathrm{b}.$$

$$\text{Azaz } 1\ \mathrm{D} = 2\ \mathrm{b}, \text{ illetve } 1\ \mathrm{b} = \frac{1}{2}\mathrm{D}.$$

$$1 \text{ oktáv} = {}^{T}\log 2 = {}^{T}\log 10^{0{,}301\ldots} \cong 0{,}301 \cdot {}^{T}\log 10 = 0{,}301\ \mathrm{D},$$

illetve fordítva $1\ \mathrm{D} \cong 3{,}322$ oktáv.

Ebből azonnal következik, hogy 1 oktáv = 0,602 b, illetve

$$1 \text{ oktáv} \cong 0{,}301\ \mathrm{D} \cong 0{,}6931\ \mathrm{N};$$

$$1\ \mathrm{N} = {}^{T}\log e = {}^{T}\log 10^{0{,}434\,29\ldots} \cong 0{,}43429\ \mathrm{D};$$

ill.:

$$1\ \mathrm{D} \cong 2{,}302\ \mathrm{N} \text{ stb.}$$

b)

$$\log 2 = 1 \text{ oktáv} = 0{,}301 \ldots \mathrm{D} = 0{,}602 \ldots \mathrm{b} \cong 0{,}6931\ \mathrm{N};$$

$$\log 3 \cong 1{,}59 \text{ oktáv} \cong 0{,}477\ \mathrm{D} \cong 0{,}954\ \mathrm{b} \cong 1{,}0973\ \mathrm{N};$$

$$\log 5 \cong 2{,}33 \text{ oktáv} \cong 0{,}699\ \mathrm{D} \cong 1{,}398\ \mathrm{b} \cong 1{,}615\ \mathrm{N};$$

$$\log 7 \cong 2{,}82 \text{ oktáv} \cong 0{,}846\ \mathrm{D} \cong 1{,}693\ \mathrm{b} \cong 1{,}9\ \mathrm{N}.$$

6. Az y logaritmikus távolsága x-től 2 egység ($2l \cdot t$). Adjuk meg y-t min x függvényét. Adjuk meg továbbá a két «pont» valódi távolságát, z-t ($z = y - x$) mint x függvényét. Könnyen ábrázolhatjuk is az $y = y(x)$ és a $z = z(x)$ függvényt.

7. Elektromos távvezeték vagy erősítőberendezés csillapításán a bemenő és kimenő teljesítmény viszonya logaritmusának $\frac{1}{2}$-szeresét értjük; ha a bemenő és kimenő ellenállás értéke egymással egyenlő, és az ellenkező, oldali lezárástól gyakorlatilag függetlennek tekinthető (azaz a bemenő ellenállás értéke attól, hogy a kimenetre milyen ellenállást kötünk, a kimenő ellenállás pedig a bemenetelt lezáró ellenállástól független), akkor a csillapítás egyszerűen a bemenő és kimenő feszültség viszonyának logaritmusa.

$$\left[\text{Ugyanis } W_b = \frac{U_b^2}{R};\ W^k = \frac{U_k^2}{R};\ \text{így: } \frac{W_b}{W_k} = \frac{\frac{U_b^2}{R}}{\frac{U_k^2}{R}} = \left(\frac{U_b}{U_k}\right)^2;\right.$$

míg:

$$\left.\frac{1}{2}\log\frac{W_b}{W_k} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{U_b}{U_k}\right)^2 = \log\frac{U_b}{U_k}\right].$$

Az elmondottakból természetesen következik, hogy távvezeték csillapítása (erősítők nélkül) bizonyosan pozitív, erősítő csillapítása viszont általában negatív.

a) Honnét következik az első mondat állítása?

b) Mit jelent az, hogy egy erősítőberendezés csillapítása ($-$) 4 Neper?

8. 10 darab: -80 cD csillapitású erősítőberendezés van sorbakapcsolva. Valamennyinek egyenlő a be- és kimenő ellenállása és gyakorlatilag független a lezárástól. Ha a bemenő feszültség 10 μV-nál kisebb, valamennyi erősítő be van kapcsolva. 10 μV-nál automatikusan kikapcsolódik az első, 50 μV-nál a második, 250 μV-nál a harmadik, 1,25 mV-nál a negyedik, 6,25 mV-nál az ötödik, 31,25 mV-nál a hatodik stb., végül 19,53 V-nál az utolsó erősítőberendezés is.

Határozzuk meg a kimenő feszültséget, U-t mint a bemenő feszültség: V függvényét, majd ábrázoljuk az $U = f(V)$ függvényt kétszer logaritmikus papíron; ábrázoljuk ezenkívül az $U = f(V)$ függvényt $10^{-3} \leq V \leq 10^{-2}$ szakaszát közönséges koordinátarendszerben!

Megoldás:

1. Erősítők vagy távvezetékek sorbakapcsolása esetén a csillapítások összegeződnek. Legyen ui. két erősítőnk; az első bemenőfeszültsége: U_1; kimenőfeszültsége U_2; a második bemenőfeszültsége U_3, kimenőfeszültsége U_4.

A sorbakapcsolás következtében $U_2 = U_3$.

Az első csillapítása: $g_1 = \log \frac{U_1}{U_2}$.

A második csillapítása:

$$g_2 = \log \frac{U_3}{U_4} = \log \frac{U_2}{U_4}.$$

Az eredő csillapítás:

$$g = \log \frac{U_1}{U_4} = \log \frac{U_1}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_4} = g_1 + g_2,$$

amit igazolni akartunk.

2. Ha tehát $V < 10 \cdot 10^{-6}$, akkor az eredő csillapítás -800 cD $= -8$D; azaz

$$\log \frac{V}{D} = -8\text{D}; \qquad \frac{V}{U} = 10^{-8}; \qquad U = V \cdot 10^{8} \text{ (ha } V < 10^{-5}).$$

$10^{-5} \leqq V < 5 \cdot 10^{-5}$ esetben az eredő csillapítás -720 cD $= -7{,}2$ D, azaz

$$U = V \cdot 10^{7{,}2} \quad (10^{-5} \leqq V < 5 \cdot 10^{-5}).$$

Ugyanígy tovább:

$$\begin{array}{lll}
U = V \cdot 10^{6{,}4} & (5 \cdot 10^{-5} & \leqq V < 2{,}5 \cdot 10^{-4}) \\
U = V \cdot 10^{5{,}6} & (2{,}5 \cdot 10^{-4} & \leqq V < 1{,}25 \cdot 10^{-3}) \\
U = V \cdot 10^{4{,}8} & (1{,}25 \cdot 10^{-3} & \leqq V < 6{,}25 \cdot 10^{-3}) \\
U = V \cdot 10^{4} & (6{,}25 \cdot 10^{-3} & \leqq V < 3{,}125 \cdot 10^{-2}) \\
U = V \cdot 10^{3{,}2} & (3{,}125 \cdot 10^{-2} & \leqq V < 0{,}156\ldots) \\
U = V \cdot 10^{2{,}4} & (0{,}156\ldots & \leqq V < 0{,}781\ldots) \\
U = V \cdot 10^{1{,}6} & (0{,}781\ldots & \leqq V < 3{,}906\ldots) \\
U = V \cdot 10^{0{,}8} & (3{,}906\ldots & \leqq V < 19{,}53\ldots) \\
U = V & (19{,}53\ldots & \leqq \text{V})
\end{array}$$

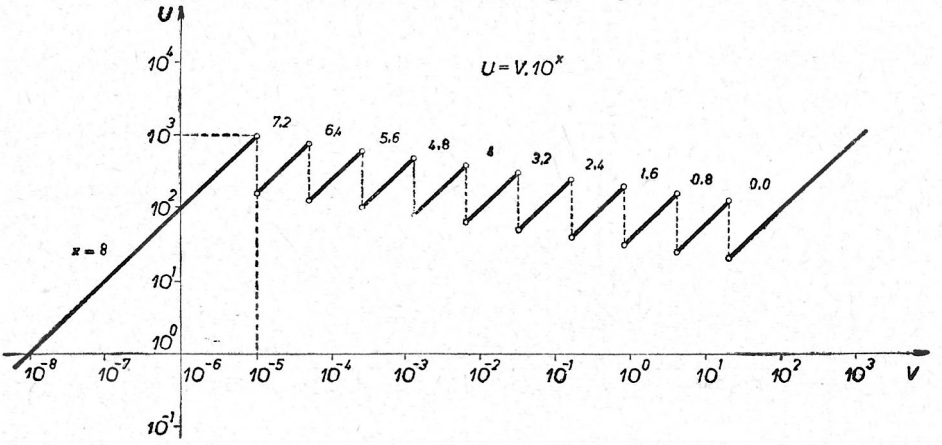
3. A logaritmikus beosztású skálákon – mint a bevezetésben láttuk – a beosztáshoz nem a logaritmus, hanem a hatvány értékét írjuk. Így tehát értéktáblázatból – amely a függvényértékeket magukat tartalmazza – közvetlenül felvihetjük a pontokat a kétszer logaritmikus beosztású papírra, majd azokat folytonos görbévé köthetjük össze (mindenüt ahol tudjuk, hogy a függvénynek nincs szakadása!). Lényegesen könnyít azonban a munkánkon, ha előre ismerjük a görbe jellegét. Az $y = f(x)$ függvény grafikonjának a jellegét azonban csak akkor tudjuk eddigi ismereteink alapján eldönteni, ha az y- és x-tengely beosztása egyenletes. Az $U = f(V)$ függvényről pl. tudjuk, hogy egyenesdarabokból áll, ha normál U, V koordinátarendszerben rajzoljuk fel. A kétszer logaritmikus papíron azonban sem U, sem V nem egyenletes beosztású! Az U-t ábrázoló tengelyre a valóságban $\log U$-t, a V-t ábrázoló tengelyre $\log V$-t vittük fel egyenletes beosztásban (pl. belekben) Ha $\log U = y$ és $\log V = x$ helyettesítéssel élünk, akkor az y- és x- tengelyek beosztása már egyenletes. Hogy a görbe jellegét ismerjük, az $y = f(x)$ függvényt kell meghatároznunk. Ez azonban könnyű. Ugyanis $U = a_v \cdot V$, ahol a_v szakaszonként konstans. Így $\log U = \log a_v + \log V$, azaz $y = \log a_v + x$. Ebből azonnal leolvashatjuk, hogy a kétszer logaritmikus papíron az $U = f(V)$ görbe egységnyi iránytangensű, de különböző magasságban húzódó egyenesszakaszokból áll. Ennek alapján – néhány pont ismeretében – az ábra megrajzolható. (L. a 88. ill. 89. ábrát a túloldalon!)

9. Ábrázoljuk a $p \cdot v^{\varkappa} = C$ egyenletű ún. politropikus (gáz)-állapotváltozásnak megfelelő függvényt $C = 10$; $\varkappa = 1{,}4$ értékek mellett normál, illetve kétszer logaritmikus beosztású milliméterpapíron!

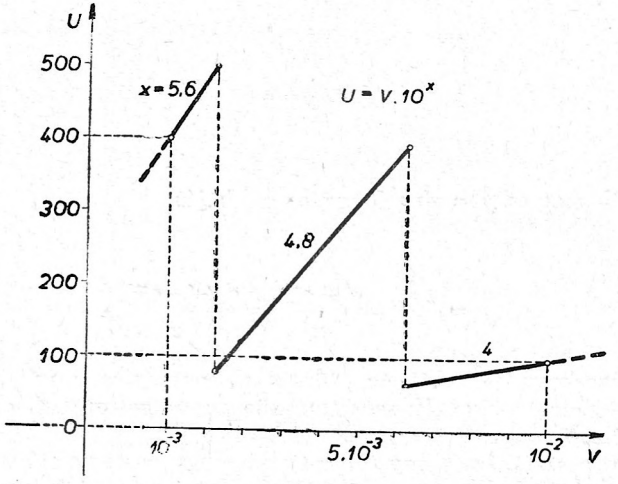
Megoldás:

a) Kétszer logaritmikus beosztású koordinátarendszer esetén pl. dekádokban történik a v, illetve a p értékek felvitele az x-, illetve y-tengelyre. Ha ezeken a tengelyeken elképzelünk egy egyenletes beosztást (az x, illetve y változókra vonatkozólag), akkor a következő összefüggés áll fenn x és v, illetve y és p között:

$$\log v = x \text{ (Dekád)}; \quad \log p = y.$$



88. ábra



89. ábra

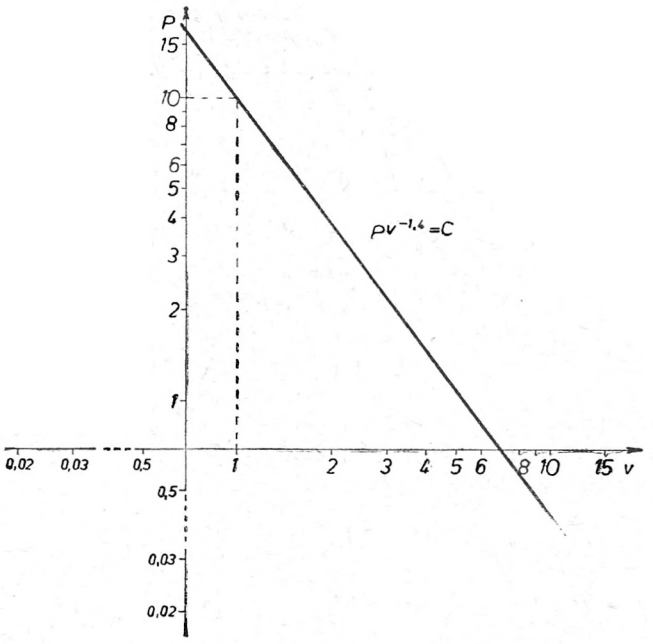
Hogy tehát a függvénygrafikont az eddig megismert ábrázolási eljárások alapján készíthessük el, az egyenletet az «egyenletes beosztású» x és y változókra kell visszavezetnünk (nyilván csak azokra érvényes, hogy pl. az $y = x^2$ görbéje parabola stb.).

Ez azonban azonnal megy, ha a fenti egyenletet logaritmizáljuk:

$\log p + x \cdot \log v = 1$. (Dekádokban)

$\log p = -1{,}4 \cdot \log v + 1$; $\quad y = -1{,}4x + 1$.

Ez egy $-1{,}4$ iránytangensű egyenes egyenlete, amely az $x = 0$; $y = 1$, azaz $\log v = 0$; $\log p = 1$ Dekádponton – tehát a $v = 1$; $p = 10$ ponton megy át! (90. ábra).



90. ábra

9. § c) β)

1. Szerkesszük meg az $y = \operatorname{sh} x$ függvény görbéjét.

Megoldás:

a) $$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2}.$$

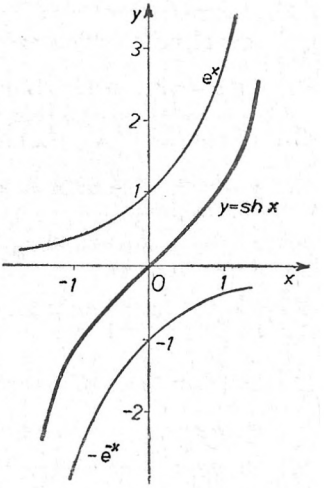
A görbe szerkesztése tehát úgy történik, hogy felrajzoljuk az e^x és a $-e^{-x}$ görbéket. A megfelelő ordináták számtani közepe szolgáltatja sh x értékét, illetve a hozzátartozó ordinátát.

Grafikusan a szerkesztés úgy folytatható, hogy a megfelelő, azonos x értékhez tartozó pontok távolságait felezzük. Ezek lesznek az $y = \operatorname{sh} x$ grafikon pontjai.

A szerkesztésből, de meggondolások alapján is belátható, hogy elég nagy (pozitív) x-eknél a levonandó $\frac{e^{-x}}{2}$ tag elhanyagolhatóan kicsiny az $\frac{e^x}{2}$-höz képest. Ilyen x-eknél tehát az $\frac{e^x}{2}$-höz aszimptotizál a görbénk (a $-\frac{e^{-x}}{2}$ tag járuléka következtében «alulról»).

Elég nagy abszolút értékű, negatív x-eknél (azaz az x-tengely negatív részén az origótól már elegendően távol) viszont az $\frac{e^x}{2}$ tag járuléka válik elhanyagolhatóan kicsinnyé a $\left(-\frac{e^{-x}}{2}\right)$-höz képest. Itt tehát ehhez aszimptotizál a görbe («felülről», a pozitív járulék miatt!).

b) Ezek alapján a grafikon megszerkeszthető. (L. a 91. ábrát!)



91. ábra

2. Ábrázoljuk az $y = \operatorname{ch} x$ függvényt.

3. Szerkesszük meg az $y = \operatorname{th} x$ függvény görbéjét. Ügyeljünk az aszimptotákra!

Rajzoljuk fel az alábbi függvényeket:

4. $y = \operatorname{ar\,sh} x$.

5. $u = \operatorname{ar\,ch} x$.

6. $v = \operatorname{ar\,th} x$. (Ügyeljünk az értelmezési tartományra!)

7. Ábrázoljuk az $y = 3 \operatorname{sh}(2x-4)$ függvényt transzformációval.

8. Szerkesszük meg a $2 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{3}-4\right)$ függvény görbéjét!

Készítsük elő az alábbi függvényeket az ábrázolásra (és esetleg ábrázoljuk is őket)!

9. $y = 3 \operatorname{th}(2x-4)$.

10. $y = 2 \operatorname{sh}(3x-4) - 0{,}7 \operatorname{ar\,th}\left(\frac{x}{2}-3\right)$.

11. $u = 3 \operatorname{ar\,ch}(2x-4{,}5)$.

12. $u = 0{,}7 \operatorname{ar\,th}\left(\frac{x}{4}-3\right)$.

13. $y = 0{,}8 \operatorname{ch}\left(\frac{x}{3}-2\right) - 1{,}4 \operatorname{ar\,th}(x-1)$.

14. Számítsuk ki $\operatorname{sh} 0{,}75 - 3 \operatorname{ch} 0{,}72 + \operatorname{ar\,th} 0{,}24$ értékét.

Számítsuk ki az alábbi értékeket:

15. $\operatorname{ar\,sh} 1{,}37 - 3 \operatorname{sh} 0{,}42 + 5 \operatorname{ar\,th} 0{,}5$.

16. $\operatorname{ch} 4{,}2 - 4 \operatorname{ar\,sh} 0{,}37 + \operatorname{th} 1{,}8$.

17. $\operatorname{ar\,th} 0{,}42 + 3 \operatorname{ar\,sh} 1{,}8 - 3 \operatorname{ch} 2{,}2$.

18. Ábrázoljuk az $y = \operatorname{sh}\frac{1}{x}$ függvényt az 1. § *b) β)* 1.-ben közölt szerkesztés alapján.

19. Szerkesszük meg az $u = x \operatorname{th}\frac{1}{x}$ függvény néhány pontját, és kössük össze folytonos vonallal. A szerkesztéshez használjuk fel az 1. § *b) β)* 1.-ben és az 5. § *a) β)* 1. feladatban ismertetett eljárásokat!

20. Ábrázoljuk az $y = \operatorname{ch}\frac{1}{x^2}$ függvényt is!

21. Szerkesszük meg az $u = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ függvény görbéjét az $y = \operatorname{ch} x - 1$-ből kiindulva

a 6. § *a) β)* 1. feladatban tanult módszer felhasználásával. Sűrítsük a felvett pontokat az $x = 0$ hely környezetében, hogy felismerjük a függvény viselkedését!

9. § *c) γ)*

(Az itt következő relációk valamennyijét hasonlítsuk össze a hozzá hasonló és a trigonometrikus függvények közt fennálló összefüggéssel!).

Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

1. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x \equiv 1$. (L. hátul!)

2. $1 - \mathrm{th}^2 x \equiv \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ (L. hátul!)

3. $y = \mathrm{sh}\, x$. Fejezzük ki a $z = \mathrm{ch}\, x$ és $w = \mathrm{th}\, x$ függvényeket mint y algebrai függvényét! (L. hátul!)

4. Adott az u érték cosinus hiperbolicusa: ch u. Számítsuk ki ennek alapján sh u, illetve th u értékét.

5. $y = \mathrm{th}\, x$. Mutassuk ki, hogy a $w = 3\,\mathrm{sh}\, x - 5\,\mathrm{ch}\, x$ függvény kifejezhető mint y algebrai függvénye!

Igazoljuk az alábbi azonosságok helyességét!*

6. $\mathrm{sh}\,(u \pm v) = \mathrm{sh}\, u\,\mathrm{ch}\, v \pm \mathrm{ch}\, u\,\mathrm{sh}\, v$. (L. hátul!)

7. $\mathrm{ch}\,(u \pm v) = \mathrm{ch}\, u\,\mathrm{ch}\, v \pm \mathrm{sh}\, u\,\mathrm{sh}\, v$.

8. $\mathrm{th}\,(u \pm v) = \dfrac{\mathrm{th}\, u \pm \mathrm{th}\, v}{1 \pm \mathrm{th}\, u \cdot \mathrm{th}\, v}$.

Mutassuk ki a következő azonosságokat!

9. $\mathrm{sh}^2 x \equiv \dfrac{1}{2}[\mathrm{ch}\, 2x - 1]$. (L. hátul!) 10. $\mathrm{ch}^2 x \equiv \dfrac{1}{2}[\mathrm{ch}\, 2x + 1]$.

Határozzuk meg, hogy az alábbi függvények hogyan fejezhetők ki x algebrai függvényeivel:

11. $y = \mathrm{ch\,ar\,sh}\, x$ (L. hátul!) 12. $z = \mathrm{sh\,ar\,th}\, x$.

13. $w = \mathrm{ch\,ar\,th}\, x$.

Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

14. $\mathrm{th\,ar\,sh}\, x \equiv \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. (L. hátul!) 15. $\mathrm{th\,ar\,ch}\, x \equiv \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Fejezzük ki az alábbi függvényeket x algebrai kifejezéseivel: (és azután esetleg ábrázoljuk őket!)

* A ± jel az alábbi formulákban annyit jelent, hogy az azonosságok bal és jobb oldalán csak a felső előjeleket vagy csak az alsó előjeleket véve figyelembe, mindkét esetben egyes formulát kapunk. Nyilvánvaló viszont ebből, hogy helytelen — fenn nem álló — azonosságra jutnánk, ha pl. a jobb oldalon a felső, ugyanakkor a bal oldalon az alsó előjelet vennők figyelembe!

16. $y = \operatorname{sh}(\operatorname{ar\,sh} u + \operatorname{ar\,ch} x)$. (L. hátul!) 17. $v = \operatorname{ch}(\operatorname{ar\,th} x + \operatorname{ar\,cth} x)$. (L. hátul!)

18. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{ar\,sh} x - \operatorname{ar\,th} 3{,}5\,x)$. 19. $y = \operatorname{sh}(2 \operatorname{ar\,sh} x)$.

20. $w = \operatorname{ch}(2 \operatorname{ar\,ch} x)$. 21. $z = \operatorname{ch}(2 \operatorname{ar\,sh} x)$.

22. $\operatorname{sh} x = 4{,}2$. Számítsuk ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{ch} 2x; \quad \operatorname{th} x; \quad \operatorname{sh} 2x; \quad \operatorname{sh} 3x.$$

Fejezzük ki az alábbi függvényeket egyetlen taggal:

23. $y = \operatorname{ar\,ch} x + \operatorname{ar\,ch} ax$. (L. hátul!) 24. $y = \operatorname{ar\,sh} x - \operatorname{ar\,ch} bx$.

25. $y = \operatorname{ar\,sh} x + \operatorname{ar\,sh} cx$. 26. $y = \operatorname{ar\,ch} ax + \operatorname{ar\,th} x$.

27. $y = \operatorname{ar\,th} 3x + \operatorname{ar\,th} 2x$. 28. $y = \operatorname{ar\,sh} 3x - \operatorname{ar\,th} x$.

a, b, c itt tetszőleges valós számot jelentenek.

29. Mi a kapcsolat az $y = \operatorname{ch} x$ és a $w = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ függvény között? Szerkesszük meg ennek alapján utóbbi függvény görbéjét.

$$a > e; \qquad e > a > 1; \qquad 1 > a > \frac{1}{e}; \qquad \frac{1}{e} > a > 0$$

esetben is (L. hátul!)

30. Mi a kapcsolat az $y = \operatorname{th} x$ és a $z = \frac{1 - a^{-4x}}{1 + a^{-4x}}$ függvény között? Szerkesszük meg ennek alapján a $z = f(x)$ grafikont!

Megoldás:

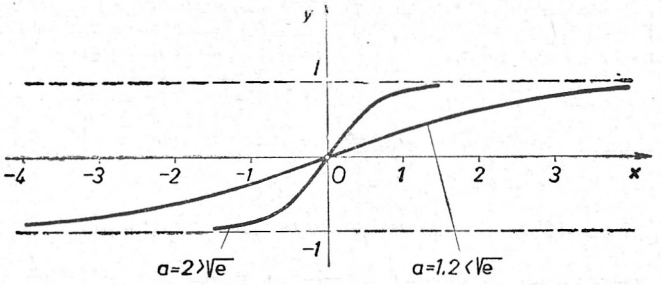
a) Az adott $z = f(x)$ függvényt két irányban is át kell alakítanunk, hogy kapcsolatot teremthessünk a th x függvénnyel. Egyrészt át kell térnünk e alapú hatványokra, másrészt szimmetrikussá kell tennünk a számlálót és nevezőt is — úgy, hogy ott ugyanannak az alapnak ugyanolyan nagyságú pozitív, illetve negatív kitevőjű hatványa szerepeljen. Utóbbi átalakítás igen egyszerű. Számlálót és nevezőt egyszerűen az a^{2x}-szel szoroznunk kell:

$$z = \frac{a^{2x} - a^{-4x+2x}}{a^{2x} + a^{-4x+2x}} = \frac{a^{2x} - a^{-2x}}{a^{2x} + a^{-2x}}.$$

b) Az e alapra történő áttérés szintén ismert elvek alapján történik:

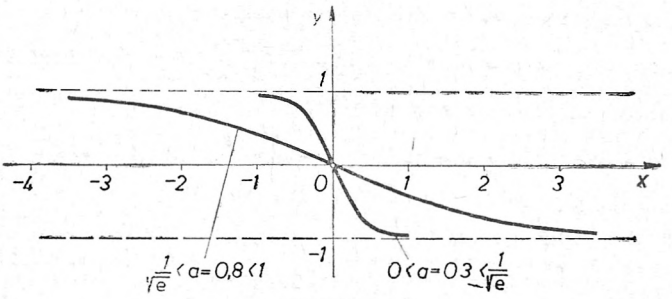
$$z = \frac{e^{2x \ln a} - e^{-2x \ln a}}{e^{2x \ln a} + e^{-2x \ln a}} = \operatorname{th}(2 \ln a \cdot x).$$

c) Utóbbi függvény az $y = \operatorname{th} x$ függvényből az x-tengely irányában $2 \cdot \ln a$ arányban történő zsugorítással származik. (Sőt, ha $a < 1$, akkor még tükrözést is kell végeznünk az x-tengelyen! Miért?)



y=th(2 lnα x)

92. ábra



y=th(2 lnα.x)

93. ábra

31. Mi az összefüggés az $y = \operatorname{ar\,sh} x$ és a $w = {}^{a}\log\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ függvény között? Ábrázoljuk utóbbi függvényt ennek alapján $a > 1$ és $a < 1$ esetben!

32. Mi a kapcsolat az $y = \operatorname{ar\,th} x$ és a

$$z = \frac{1}{4} \cdot {}^{a}\log \frac{1+8x+16x^2}{1-8x+16x^2}$$

függvény között. Ábrázoljuk ennek alapján a $z = f(x)$ függvényt $a > 1$ és $a < 1$ esetben is

33. Mi a kapcsolat az $y = \operatorname{arch} x$ és a

$$w = {}^{a}\log 4\left(3x \pm \sqrt{9x^2-1}\right)$$

függvény között?

34. Mely görbe paraméteres alakban adott egyenlete az alábbi függvénypár?

$$x = a \cdot \operatorname{ch} t,$$
$$y = b \cdot \operatorname{sh} t.$$

35. Ábrázoljuk az

$$y = \ln \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{9}x$$

függvényt, az egyenesből és a $z = \operatorname{ar\,th} x$ görbéből származtatva, az összeadás grafikus elvégzésével!

9. § c) δ)

1. Az átviteltechnikában a *szűrőméretezés* egyik legfontosabb függvénye az

$$u = f(\Delta) = \ln \operatorname{th} \frac{\Delta}{2}$$

kapcsolat.
Ábrázoljuk a függvényt!

2. A saját súlyával terhelt, két ponton is kifeszített *kötél* egyensúlyi alakja:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Ábrázoljuk a görbét $a = 4{,}5 \cdot 10^2$ értéknél. Rá fogunk ismerni a görbére – az ún. láncgörbére (ti. a saját súlyával terhelt belógó lánc alakja is ilyen).
Számítsuk ki az ordinátaértékeket az $x = 0$; $x = 12$; $x = 65$ helyeken!

3. Egy speciális *négypólus*, az ún. *fojtótag* csillapítását (g) a körfrekvencia (ω) függvényében igen jó közelítéssel a következő kapcsolat írja le:

$$g = \begin{cases} g_0 + 2 \operatorname{ar\,th} \dfrac{\omega_0 - \omega}{\omega}, & \text{ha} \quad \omega \leqq \omega_0 \\ g_0 + 2 \operatorname{ar\,ch} \dfrac{\omega}{\omega_0}, & \text{ha} \quad \omega \geqq \omega_0. \end{cases}$$

Ábrázoljuk a $g = g(\omega)$ függvényt $g_0 = 0{,}8$; $\omega_0 = 2$ értékek esetén.

4. *Túlcsillapított rezgőkörben* az $i = i(t)$ áramgörbét a következő függvény határozza meg:

$$i = i(t) = A \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{2L}} \cdot \operatorname{ch}(\alpha t + \beta).$$

Ábrázoljuk az $i = i(t)$ függvényt

$$A = 0{,}8; \qquad \frac{R}{L} = 10^3; \qquad \alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-3}; \qquad \beta = 1{,}4$$

értékek mellett. (i az áramerősséget, t az időt jelenti).

Megjegyzés. Az előzőkben letárgyalt elemi transzcendens függvényeken (a trigonometrikus, exponenciális és hiperbolikus függvényeken és inverzeiken) kívül még nagyszámú *speciális transzcendens függvényt* ismer a matematika. Ezek tanulmányozásáról – ismereteink e kezdő fokán – nem lehet szó, ellenben a későbbi kötetekben több típusuk került ismertetésre (pl. a B. VII.** kötetben az ún. *Bessel-*, *Neumann-*, *Hankel-*, *Gauss-*, *Legendre-*, *Csebisev-*, *Laguerre-*, *Hermite*-féle stb. függvények; a C. I. kötetben az ún. gamma-, béta-, elliptikus stb. függvények).

NEGYEDIK RÉSZ

*KIEGÉSZÍTÉS

10. §. SOROZATOK, VÉGTELEN SOROK. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE ÉS FOLYTONOSSÁGA

(Megjegyzés: A sorozatokkal, sorokkal és a velük történő számolás technikájával részletesen foglalkozunk majd az 5., illetve a 6. kötetben. Éppen ezért ebben a Kiegészítés c. részben *csak a legfontosabb tételeket ismertetjük és csak néhány feladatot oldunk meg.* Ezeknek a feladatoknak nem az a céljuk, hogy alaposan megismertessenek bennünket a határértékszámítás technikájával, hanem csak a tételeket akarjuk egyszerű példákon szemléltetni; ezenkívül azt a néhány fontos határértéket, amelyet a következő fejezetekben gyakran felhasználunk, itt meghatározzuk!)

a) Sorozatok

Legyen adott valamilyen utasítás, melynek segítségével a számoknak egymást követő sorozatát tudjuk – vég nélkül – képezni; azaz van egy első, egy második – és így tovább – eleme az egymás után rendelt számoknak. A számok így kapott – rendezett – sorozatát (végtelen) számsorozatnak hívjuk. Az előbb említett *utasítás legtöbbször az «n-edik» – az «általános» – elem számítását teszi lehetővé.* Ezen utasítás *segítségével tehát bármelyik elemet számíthatjuk,* csak azt kell tudnunk, hányadiknak szerepel a sorozatban. Pl. a természetes (egész) számok ilyen számsorozatot alkotnak: 1, 2, 3, . . . n, ... Azt a tényt, hogy az utasítás alapján – szükség esetén – további tagjait is felírhatjuk a sorozatnak, pontokkal – a ki nem írt elemek helyén – jelöljük. A sorozat elemeit általánosságban – ekkor tehát még nem konkretizáltuk esetleg a sorozatot – valamilyen betűvel jelöljük; hogy a sorozat hányadik eleméről van szó, a betű jobb alsó indexével fejezzük ki. Előző példánkhoz kapcsolódva: $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; stb., $a_n = n$; a képzési szabályt éppen legutóbbi egyenletünkkel szoktuk megadni. Magát *a számsorozatot így szoktuk jelölni:* (a_n).

1. Képezzük az első, a második, negyedik, tizedik elemét a következő sorozatnak: $u_n = 2^n$.

Adjuk meg a következő számsorozatok harmadik, hetedik és tizenkettedik elemét:

2. $a_n = (-1)^n \cdot \cos\frac{n}{2}\pi$. 3. $b_n = \frac{1-\cos n\pi}{n^2}$.

4. $c_n = \frac{n^n}{n!}$.

(Itt $n!$ az első n természetes szám szorzatát jelenti: tehát pl.

$1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$;
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot = 120$; stb.)

A számsorozat *korlátos*, ha minden eleme abszolút értékre kisebb egy – konkréten megadható – számnál (K); jelekben: $|x_n| \leqq K$, másképp: $-K \leqq x_n \leqq K$. A természetes számokból alkotott sorozat pl. nyilván nem korlátos, mert akármilyen nagy számot jelentsen is K, mindig találunk a sorozatban nála nagyobbakat (ti. $a_{K+1} = K+1$; $a_{K+2} = K+2$; stb. már nagyobbak, mint K).

Az alábbi számsorozatok közül keressük ki a korlátosokat, és adjunk meg mindegyiknél két-két korlátot; az első lehet tetszés szerinti, a második a lehető legkisebb legyen!

5. $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$

6. $-1, 2, -3, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$

7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

8. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$

9. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \ldots$

10. $1; 1+\frac{1}{2}; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}; \ldots;$

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}; \ldots$

11. $1, 2, 1{,}5, 2{,}5, 2, 3, 2{,}5, 3{,}5, 3, 4, 3{,}5, 4{,}5, \ldots$

12. $1, 1{,}5, 1{,}25, \ldots, \left(1+\frac{1}{2^n}\right), \ldots$

13. $-0{,}5; 1{,}25; -0{,}875; 1{,}0625; \ldots, \left[(-1)^n + \frac{1}{2^n}\right], \ldots$

14. $10; 50; \frac{1000}{6}; \frac{10\,000}{24}; \ldots; \frac{10^n}{n!}; \ldots$

15. $\sin\frac{1}{2}; \sin\frac{1}{4}; \sin\frac{1}{8}; \ldots; \sin\frac{1}{2^n}; \ldots$

16. $1; -6; 18; -36; 54; \ldots; (-1)^n \cdot \frac{6^n}{n!}; \ldots$

A 14. feladatban – amint azt könnyen beláthatjuk – a számsorozat elemei a 10. elemig nőnek. A 11. elem azonban már kisebb a 10-.nél – előbbit ugyanis úgy számíthatjuk, hogy utóbbi számlálóját 10-zel, nevezőjét 11-gyel, az egész törtet tehát $\frac{10}{11}$-gyel, azaz egynél kisebb számmal szorozzuk. Ezután már állandóan csökkennek az elemek. a_n-ből ugyanis úgy nyerjük a_{n+1}-et, hogy előbbit $\frac{10}{n+1}$-gyel szorozzuk. A szorzó pedig $n \geqq 10$ esetében egynél kisebb. Így $a_{n+1} < a_n$, ha $n \geqq 10$. A legnagyobb elem ezek szerint

$$a_{10} = \frac{10^{10}}{10!} = 2755{,}73192 \ldots$$

Ez az egyik (a legkisebb) felső korlátja a sorozatnak!

Amennyiben az elemek abszolút értékére vonatkozó korlátot nem találtuk – olyan számot azonban igen, melynél a sorozat egyetlen eleme sem nagyobb, a sorozatot *felülről korlátosnak*, a számot *felső korlátnak* hívjuk; ha viszont olyan számot sikerült találnunk, melynél a sorozat egyetlen eleme sem kisebb, a sorozatot *alulról korlátosnak*, a számot *alsó korlátnak* hívjuk. Ezek szerint pl. a természetes számok sorozata alulról korlátos, egyik alsó korlátja a 0 szám (de természetesen alsó korlát az $\frac{1}{2}$ a -1, a $-15{,}73$ stb. is). *Jelben:* alulról korlátos a sorozat, ha $x_m \geqq k$ minden m-re, tehát a sorozat minden elemére. felülről korlátos, ha $a_n \leqq K$.

17. Az 5 – 16. f.-ban szereplő sorozatok közül keressük ki a felülről, illetve alulról korlátos sorozatokat, és mindegyiknél adjunk meg három-három korlátot – közöttük lehetőleg a *legkisebb felső*, illetve a legnagyobb alsó korlátot is.

Ha egy sorozatban bármelyik elem nagyobb (vagy legalább egyenlő), mint az őt megelőző elem, a számsorozatot *monoton növekedőnek* hívjuk; ha bármelyik elem kisebb (legfeljebb egyenlő), mint az őt megelőző, a számsorozat *monoton csökkenő* (fogyó).

Nagyon *fontos az az eset is*, amikor a számsorozat fenti értelemben nem monoton, de *végül is monoton*; ez alatt azt kell értenünk, *hogy a legelső k elemet figyelmen kívül hagyva, a megmaradt sorozat már monoton.* Itt k értékét pontosan meg kell adni tudnunk.

18. Keressük ki a 10. § *a)* 1 – 16. feladatban szereplő példák közül a monoton sorozatokat.

19. Keressük ki a 10. § *a)* feladatok közül a végül is monoton sorozatokat.

20. Igazoljuk, hogy

a) az $x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\ x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2; \quad \ldots; \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \ldots$

sorozat monoton növekedő,

b) az $y_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2; \quad x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3; \quad \ldots; \quad x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

sorozat monoton fogyó,

c) mindkét sorozat korlátos.

Megoldás:

a) Először egy – a későbbiekben is nagyon gyakran felhasználható – egyenlőtlenséget (Bernoulli-egyenlőtlenség) fogunk igazolni.

Jelentsen n valamely 0-nál nagyobb pozitív egész számot, p legyen (zérustól különböző) 1-nél nagyobb szám.

Ebben az esetben érvényes a következő (Bernoulli-féle) egyenlőtlenség:

$$(1+p)^n \geqq 1 + np.$$

Ez $n = 2$ esetében valóban igaz:

$$(1+p)^2 = 1 + 2p + p^2 > 1 + 2p.$$

Tegyük fel, hogy $n = k$ esetére is igazoltuk az egyenlőtlenséget. Kimutatjuk, hogy akkor $n = k+1$ esetére is igaz. (Mivel pedig $n = 2$-nél valóban igaz volt, ezek szerint $n = 3$, $n = 4$ stb.-re is, tehát minden 2-nél nagyobb egész n-re igaz; – ez az ún. teljes indukcióval történő igazolás.)

Tehát feltesszük, hogy

$$(1+p)^k > 1+p \cdot k.$$

Szorozzuk az egyenlőtlenséget $1+p > 0$-val!

$$(1+p)(1+p)^k = (1+p)^{k+1} > (1+kp)(1+p) = 1+kp+p+kp^2 =$$
$$= 1+(k+1)p+kp^2 > 1+(k+1)p; \quad \text{hiszen} \quad k > 0,\ p^2 > 0, \text{ így } kp^2 > 0.$$

Vagyis:

$$(1+p)^{k+1} > 1+(k+1)p,$$

– ahogy állítottuk.

b) A feladat *a)* pontja szerint azt kell igazolnunk, hogy

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{nagyobb, mint}$$

$$x_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

Ha ti. az «n-edik», az általános tag nagyobb az őt megelőzőnél, akkor ez n bármely értékére igaz, a sorozat valóban monoton növekedő.

Az igazolandó egyenlőtlenséget írjuk ilyen alakba:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}.$$

Hogy a Bernoulli-egyenlőtlenséget felhasználhassuk, osszuk el egyenlőtlenségünket $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$-nel.

Így csak egyetlen tagunk lesz, ami n-edik hatványon szerepel:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n-1}\right)^{-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}.$$

A bal oldalt egyszerűsítjük, mielőtt felhasználnánk az egyenlőtlenséget:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n-1+1}{n-1}} = \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2} = 1-\frac{1}{n^2}.$$

Mivel

$$n > 1, \quad \text{azért} \quad -\frac{1}{n^2} > -1,$$

a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazható:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-n \cdot \frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}.$$

Éppen ezt kellett azonban igazolnunk! (Figyeljük meg utolsó előtti egyenlőtlenségünket; ott van kitűzve ezen egyenlőtlenség igazolása!)

c) A feladat *b)* pontjának igazolása lépésről lépésre ugyanígy történhetik, mint a megelőző.

d) A feladat *c)* pontjának igazolásához csak azt kell meggondolnunk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

— azaz, hogy $x_n < y_n$, bármilyen indexet jelentsen is n.

Mivel pedig az (y_n) sorozat monoton csökkenő, az (x_n) sorozat viszont monoton növekedő, azért egyrészt:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_n,$$

azaz $x_1 \leqq x_n$,

másrészt:

$$y_1 \geqq y_2 \geqq y_3 \geqq \cdots \geqq y_n,$$

azaz $y_n \leqq y_1$.

Összefoglalva az eddigi egyenlőtlenségeket:

$$4 = y_1 \geqq y_n \geqq x_n \ (\geqq x_1 = 2).$$

Valamennyi y_n és x_n elem nagyobb ezek szerint pl. 0-nál, és bizonyosan nem kisebb 2-nél, ugyanígy valamennyi kisebb pl. 10-nél, és bizonyosan nem nagyobb 4-nél!

Alsó korlát tehát (mindkét sorozatra) pl. a 0 vagy a 2.

Felső korlát (mindkét sorozatra) pl. a 10 vagy a 4.

0-sorozatnak *hívjuk a sorozatot, ha annak elemei abszolút értékre «minden határon túl csökkennek» — azaz, bármilyen kis számot jelentsen is ε, a sorozatnak egy n_0 indexű elemétől kezdve mindegyik további eleme abszolút értéke kisebb, mint ε.*

Ez az n_0 index természetesen függ attól, hogy mekkora ε. (Általában: minél kisebb ε, annál nagyobb — de mindig konkréten megadható! — n_0 értéke. n_0 tehát függ ε-tól. Jelekben: $n_0 = n_0(\varepsilon)$. (x_n) tehát 0-sorozat, feltéve, hogy

$$|x_n| < \varepsilon, \text{ hacsak } n > n_0,$$

(azaz, ha x_n *«távolabb»* — de ott akárhol — van a sorozatban, mint — az ε megadása után kikereshető x_{n0}). Lényeges megjegyeznünk, hogy ezen n_0 nagysága függ az ε-tól, de bármilyen kis ε-hoz meg kell tudjuk adni a hozzátartozó n_0-t. Azt a tényt, hogy egy sorozat 0-sorozat, úgy is ki szoktuk fejezni, hogy a sorozat elemei az «0-hoz tartanak, konvergálnak», jelben: $x_n \to 0$, ha $n \to \infty$ vagy röviden: $x_n \to 0$. Természetesen minden n_0 helyett nála nagyobb n_1 index is megfelelő — ha ti. $n_1 > n_0$, akkor $n > n_1$-ből következik, hogy egyszersmind $n > n_0$.

21. *a)* Keressük ki az 5 – 16. feladatokban megadott sorozatok közül a 0-sorozatokat, és adjunk meg mindegyikben egy az $\varepsilon = 0{,}2$-höz, az $\varepsilon = 0{,}0001$-hez és egy az $\varepsilon = 10^{-8}$-hoz tartozó n_0-t.

b) Keressük meg az 5 – 16. feladatok 0-sorozatainál az $\varepsilon = 0{,}001$-hez tartozó legkisebb — tehát még éppen megfelelő — n_0-kat.

Legyen adott egy monoton növekedő (x_n) és egy monoton fogyó (y_n) számsorozat. Amennyiben az (x_n) sorozat bármelyik eleme kisebb, mint az (y_n) sorozat ugyanazon indexű eleme (vagy legfeljebb egyenlő vele), azaz $x_n \leqq y_n$ és a megfelelő (ugyanazon indexű) elemek különbségei, a (d_n) sorozat tagjai $(d_n = x_n y_n)$ 0-sorozatot alkotnak, akkor az (x_n) és (y_n) sorozat egy ún. **intervallumskatulyázást** határoz meg. Ezt röviden (x_n/y_n)-nel jelöljük.

Azt az S számot, amelyet «valamennyi skatulya tartalmaz», — azaz, amely n bármilyen értéke mellett kielégíti a következő egyenlőtlenséget:

$$x_n \leqq S \leqq y_n$$

— az (x_n/y_n) **skatulyázás magvának** hívjuk.

22. Ábrázoljuk számegyenesen azon «intervallumskatulyázás» első 6 – 7 skatulyáját, – az x_1 kezdő és y_1 végpontú, majd az x_2 és kezdő y_2 végpontú stb. skatulyákat, – melyet az

$$x_1 = 0{,}5; \qquad x_2 = 0{,}75; \qquad x_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

monoton növekvő, valamint az

$$y_1 = 1{,}5 \qquad y_2 = 1{,}25; \ldots; \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

monoton csökkenő és

$$d_1 = 1; \qquad d_2 = 0{,}5; \ldots; \qquad d_n = 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

differenciájú sorozatok határoznak meg. Szemmel látható az ábrán – (később tételként kimondjuk) – hogy a skatulyák egyetlen pontra – egy számra – a skatulyázás ún. magjára zsugorodnak.

23. Igazoljuk, hogy az (x_n/y_n) intervallumskatulyázásban nemcsak az $x_n \leqq y_n$ egyenlőtlenség áll fenn, hanem az x_n sorozat bármely eleme kisebb, mint az y_n sorozat bármely eleme – és viszont:

$$x_k \leqq y_e; \qquad y_m \geqq x_n$$

24. Igazoljuk, hogy – adott (x_n/y_n) skatulyázás esetén legfeljebb egyetlen olyan S szám található, amely mindegyik skatulyában «benne van» – amely tehát n minden értékénél eleget tesz a következő egyenlőtlenségnek:

$$x_n \leqq S \leqq y_n \qquad \text{(L. hátul!)}$$

Az $x_1, x_2, \ldots$ számsorozatról azt mondjuk, hogy **konvergens**, *és határértéke az* x *szám*, ha az

$$u_1 = (x_1 - x); \; u_2 = (x_2 - x); \; u_3 = (x_3 - x); \; \ldots; = (x_n - x), \ldots$$

sorozat 0-sorozat.

Szokásos jelöléssel:

$$x_n \to x, \text{ vagy } \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

26. Konvergens-e az $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ sorozat, s ha igen, mi a határértéke?

Megoldás:

a Néhány elem kiszámítása meggyőz bennünket arról, hogy növekvő index esetén egyre közelebb kerülünk az 1-hez. Várható tehát, hogy a sorozat konvergens és határértéke: egy.

Valóban: az $u_n = (x_n - x) = 1 - \frac{1}{2^n} - 1 = -\frac{1}{2^n}$ sorozat zérussorozat.

Tekintettel arra, hogy számsorozatok *konvergens* voltát általában könnyebb megállapítani, mint a határértéket meghatározni — emellett előbbi megállapítása sokkal fontosabb — szükségünk van a konvergenciának olyan ismérvére (kritériumára), amelyben a határérték nem szerepel.

A *Cauchy-tól eredő konvergenciakritérium* így szól: jelentsen bármilyen kicsiny számot ε, és bármilyen nagy számot k; a sorozat konvergens, ha egy (az ε ismeretében konkréten megadható x_{n_0}) elemen túl bármelyik két elem különbségének abszolút értéke kisebb, mint ε — akármilyen távol van is egymástól a két elem:

$$|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon, \quad \text{hacsak} \quad n > n_0.$$

n_0 itt természetesen ismét függ ε-tól. Ezzel szemben nem függhet (!) k-tól; fenti egyenlőtlenségnek k bármely — azaz nem szükségképp előre megadott — értékénél teljesülnie kell !

27. Igazoljuk, hogy a konvergencia ilyen meghatározása egyértelmű az eredeti definícióval (L. hátul!)

28. Igazoljuk, hogy egy konvergens számsorozat *egyértelműen* meghatározza saját határértékét. (L. hátul!)

29. Mutassuk ki, hogy korlátos sorozat felülről is, alulról is korlátos. És viszont: felülről is, alulról is korlátos sorozat korlátos.

30. Igazoljuk intervallumskatulyázással, hogy bármely felülről korlátos sorozatnak van legkisebb felső, alulról korlátos sorozatnak legnagyobb alsó korlátja.

Megoldás:

a) Legyen az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat felülről korlátos, és valamelyik felső korlátja K. Jelöljük ki a sorozat egy tetszés szerinti elemét, pl. a_m-et.

Válasszuk ki az a_m-et megelőző elemek közül a legnagyobbat, ha az nagyobb, mint a_m, illetve magát a_m-et, ha ilyen nincs. Jelöljük az így kiválasztott elemet a_l-nek. Mármost két eset van. Vagy létezik legalább egy olyan a_r elem, amely nagyobb, mint a_l ($a_r > a_l$, és természetesen $r > l$), vagy nincs ilyen. Utóbbi esetben a_l maga a legkisebb felső korlát. Előbbi esetben viszont a következő skatulyázással jutunk el a keresett korláthoz:

Válasszuk a skatulyázásban a_l-et x_1-nek, K-t y_1-nek. Felezzük a most megalkotott első skatulyát. Legyen a_l és K számtani közepe: $K_1 = \frac{a_l + K}{2}$. Ha az eredeti sorozatnak van eleme a K_1 és K meghatározta skatulyában, akkor $x_2 = K_1$, $y_2 = y_1 = K$ számok határozzák meg a második skatulyát, ha viszont nincs a sorozatnak K_1-*nél* nagyobb eleme, akkor $x_1 = x_2 = a_l$ és $y_2 = K_1$ határolják a második skatulyát. Folytassuk a felezési eljárást ugyanígy tovább. Az egyes intervallumok bal oldali végpontjai még nem korlátok, van a sorozatban náluk nagyobb elem, a jobb oldali végpontok már korlátok. Mivel pedig az intervallumok skatulyázást alkotnak (igazoljuk ezt), ezért egyetlen pontra, a skatulyázás magvára zsugorodnak, s ez a legkisebb felső korlát.

b) A legnagyobb alsó korlát létezését ugyanígy mutathatjuk ki.

A legkisebb felső korlátot **felső határnak** *a legnagyobb alsó korlátot* **alsó határnak** *nevezzük.*

31. Igazoljuk, hogy minden monoton és korlátos sorozat konvergens. (L. hátul!)

32. Mutassuk ki, hogy minden korlátos, végül is monoton sorozat konvergens!

33. Igazoljuk, hogy az (x_n/y_n) intervallumskatulyát alkotó (x_n) és (y_n) sorozat konvergens; határértékük ugyanis az s szám – ez az s épp a skatulyázás magva.

34. $x_1 = a-1$; $x_2 = (\sqrt{a}-1)$; $x_3 = (\sqrt[3]{a}-1)$; ...; $x_n = (\sqrt[n]{a}-1)$; ...
Igazoljuk, hogy a sorozat 0-sorozat ($a > 0$). (L. hátul!)

35. Jelentsen (z_n) egy monoton csökkenő zérussorozatot. Igazoljuk, hogy az

$$x_1 = a^{z_1} - 1;\quad x_2 = a^{z_2} - 1;\quad x_3 = a^{z_3} - 1; \ldots;\quad x_n = a^{z_n} - 1; \ldots$$

sorozat is monoton 0-sorozat.

$$(a > 1;\quad \text{illetve}\quad 0 < a \leqq 1) \qquad \text{(L. hátul!)}$$

Az előző feladatokon alapszik az exponenciális függvény – amely eredetileg csak racionális kitevőkre van értelmezve (ilyenkor tudniillik a függvényérték hatványozással, illetve gyökvonással számítható) – bármilyen valós kitevő esetén történő értelmezése.

Legyen pl. σ irracionális szám; mindig tudunk találni olyan racionális számokból álló sorozatot, amelynek σ a határértéke (pl. a σ-t előállító végtelen tizedes tört alsó vagy felső közelítő törtjeiből álló sorozatra gondolhatunk). $\sqrt{2}$-t pl. a következő racionális sorozatokkal tudjuk megközelíteni:

az alsó közelítő törtek sorozata:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 1{,}4;\ a_3 = 1{,}41;\ a_4 = 1{,}414; \ldots$$

a felső közelítő törteké:

$$f_1 = 2;\ f_2 = 1{,}5;\ f_3 = 1{,}42;\ f_4 = 1{,}415;\ f_5 = 1{,}4143; \ldots$$

Mindaddig viszont, amíg a kitevő racionális, ki tudjuk számítani a hatvány értékét. Ha tehát az a sorozat – amelyet úgy kapunk, hogy az irracionális kitevőhöz konvergáló sorozat racionális elemeit választjuk kitevőnek – konvergens, akkor határtékét tekinthetjük az alap irracionális kitevőjű hatványának – feltéve, hogy nem függ ez az érték annak a sorozatnak speciális választásától, amellyel a kitevőt közelítettük.

36. *a)* Adjuk meg a σ számot mint egy (x_n/y_n) skatulyázás magvát, ahol x_n és y_n is racionális számok.

b) Igazoljuk, hogy az (a^{x_n}/a^{y_n}) valóban intervallumskatulyázást alkot ($a > 1$; illetve $0 < a \leqq 1$).

c) Legyen (x'_n/y'_n) olyan skatulyázás, amelynek ugyancsak σ a magva és x'_n, illetve y'_n szintén racionális számok: de $x'_n \neq x_n$; $y'_n \neq y_n$, azaz a két skatulyázás különböző. (L. hátul!)

Igazoljuk az előzőhöz hasonlóan, hogy $(a^{x'_n}/a^{y'_n})$ is intervallumskatulyázást alkot. Mutassuk meg továbbá, hogy a skatulyázás magva megegyezik az (a^{x_n}/a^{y_n}) skatulyázás magvával.

d) Mutassuk meg, hogy – amennyiben σ racionális szám – az (a^{x_n}/a^{y_n}), illetve az $(a^{x'_n}/a^{y'_n})$ skatulyázások magva megegyezik – a most könnyen számítható – a^σ-val!

Ha viszont a irracionális, akkor a^σ nem számítható – elemi úton. Ebben az esetben épp az (a^{x_n}/a^{y_n}), illetve $(a^{x'_n}/a^{y'_n})$ stb. skatulyázások magvát *definiáljuk* mint a^σ értéket!

Számítsuk ki az előző feladatban ismertetett skatulyázás segítségével a következő értékeket:

37. $10^{\sqrt{2}}$; 38. $3^{\sqrt{3}}$;

39. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; 40. $(\sqrt[3]{3})^{\sqrt{3}}$

három «értékes számjegy» pontossággal!

41. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat konvergens, határértéke: a. A $b_1, b_2 \ldots b_n, \ldots$ sorozat határértéke: b. Képezzük a következő sorozatot: $c_1 = a_1 + b_1$; $c_2 = a_2 + b_2$; $\ldots$; $c_n = a_n + b_n$. Igazoljuk, hogy ezen sorozat is konvergens és határértéke: $a + b$.

Megoldás:

A feltevés szerint a $d_n = [c_n - (a+b)] = [(a_n + b_n) - (a+b)]$ sorozatnak 0-sorozatnak kell lennie.

Ezt könnyen igazolhatjuk is pl. a következő módon: Adjunk meg egy tetszésszerintien kicsiny ε-t. Mivel $a_n \to a$, találhatunk egy oly n_1 indexet, amelytől kezdve: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, hacsak $n > n_1$; a (b_n) sorozat szintén konvergens; itt is találhatunk ezért egy olyan n_2 indexet, melytől kezdve: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, hacsak $n > n_2$. Válasszuk az n_1 és n_2 indexek közül a nagyobbikat n_0-nak. Az előbbi egyenlőtlenségek ekkor így is írhatók:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \qquad (\text{mert } n_0 \geqq n_1).$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \qquad (\text{mert } n_0 \geqq n_2).$$

Tehát: $$|d_n| = |(a_n + b_n) - (a+b)| \leqq$$

$$\leqq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ ha } n > n_0. \text{ Qu. e. d.}$$

42. Az előbbi feladatban szereplő két konvergens sorozat elemeinek különbségsorozatát képezzük:

$$c_1 = (a_1 - b_1); \quad c_2 = (a_2 - b_2); \ldots, \quad c_n = (a_n - b_n); \ldots$$

Igazoljuk, hogy a különbségsorozat is konvergens és határértéke: $a - b$.

43. Képezzük a 41. f. két sorozatának segítségével a két sorozat azonos indexű elemeinek «szorzatát»; azaz a következő szorzatot:

$$c_1 = a_1 \cdot b_1; \quad c_2 = a_2 \cdot b_2; \ldots; \quad c_n = a_n \cdot b_n; \ldots$$

Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat is konvergens, és határértéke: $a \cdot b$.

44. A 41. f.-ban szereplő (b_n) sorozat ne legyen 0-sorozat, azaz: $b \neq 0$. Ezenkívül a (b_n) sorozatban ne szerepeljen 0; (amennyiben mégis szerepelne, változtassuk meg a sorozat 0-val egyenlő tagjait tetszés szerint — a 28. f.-ból tudjuk, hogy ezzel a határértéket nem változtattuk meg). Ezek után képezhetjük a következő sorozatot:

$$c_1 = \frac{a_1}{b_1}; \qquad c_2 = \frac{a_2}{b_2}; \ldots; \qquad c_n = \frac{a_n}{b_n}; \ldots$$

(ennek minden tagját képezni tudjuk – sehol sem fordul elő értelmetlenség; ti. 0-val való osztás).

Igazoljuk, hogy az így kapott sorozat konvergens és határértéke: $\frac{a}{b}$.

Megoldás:

a) Azt kell igazolnunk, hogy a

$$d_n = \left(c_n - \frac{a}{b}\right) = \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - b_n a}{b_n \cdot b}$$

sorozat 0-sorozat.

Mivel a (b_n) sorozat konvergens, «elég messze menve a sorozatban» – azaz egy n_1 indextől kezdve – a $|b_n - b|$ különbség kisebb, mint ε', tehát b_n bizonyára nem kisebb (ha b negatív, akkor nem nagyobb), mint $\frac{b}{2}$. Adjunk meg ezenkívül egy tetszés szerintien kicsiny ε-t. Ekkor egy n_2 indextől kezdve: $|b_n - b| < \frac{b^2}{8|a|}\,\varepsilon$, hacsak $n > n_2$. S mivel az (a_n) sorozat is konvergens, egy n_3 indextől kezdve: a_n nem nagyobb (ha a negatív, nem kisebb), mint $2a$, egy n_4 indextől kezdve pedig: $|a_n - a| < \frac{|b|}{2}\,\varepsilon$, hacsak $n > n_4$.

Válasszuk ki az $n_1; n_2; n_3; n_4$ számok közül a legnagyobbat és jelöljük n_0-val. Az előző egyenlőtlenségek így is írhatók:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \text{ (mert } n_0 \geqq n_1);$$

$$|b_n - b| < \frac{b^2}{8|a|} \cdot \varepsilon, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \text{ (mert } n_0 \geqq n_2);$$

$$|a_n| < 2|a|, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \text{ (mert } n_0 \geqq n_3);$$

$$|a_n - a| < \frac{|b|}{2}\,\varepsilon, \qquad \text{hacsak } n > n_0; \text{ (mert } n_0 \geqq n_4)$$

b) Most már meg tudjuk becsülni a

$$d_n = \left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right) = \frac{b_n(a_n - a) - a_n(b_n - b)}{b_n \cdot b}$$

differenciát – helyesebben ki tudjuk mutatni, hogy 0-sorozat!

$$d_n = \frac{b_n(a_n - a) - a_n(b_n - b)}{b_n \cdot b} = \frac{1}{b}(a_n - a) - \frac{a_n}{b_n} \cdot \frac{1}{b}(b_n - b);$$

$$|d_n| \leq \frac{1}{|b|}|a_n - a| + \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{|b|} \cdot \frac{|b|}{2}\varepsilon +$$

$$+ \frac{4|a|}{b^2} \cdot \frac{b^2}{8|a|} \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De épp ezt kellett bizonyítanunk!

A legutolsó négy feladatban igazolt tételek nagy fontosságúak. Röviden így szokták őket írni (ez az írásmód – matematikailag ugyanannyit mond, mint az előbb levezetettek – azt fejezi ki, hogy a *határmenet művelete az alapműveletekkel* sorrendre *felcserélhető):*

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n;$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n;$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

Fenti egyenletek mindig fennállanak, *ha nem fordul elő értelmetlenség!* (Értelmetlenségnek minősül pl. a 0-val való osztás, a $0 \cdot \infty$ alakú szorzat, a $(\infty - \infty)$ alakú összeg stb.)

Az itt közölt levezetéseket, illetve a gondolatmenetet többször egymás után alkalmazva, kimutathatjuk, hogy a négy alapművelet véges számú alkalmazása útján előálló kifejezéseknél is felcserélhető a határátmenet az alapműveletekkel, feltéve, hogy nem jutunk értelmetlenségre. (Az alapműveletek véges számú alkalmazására utasító műveleti utasításokat röviden – általánosságban – R-rel jelölve):

$$\lim R(a_n, b_n, c_n, d_n \ldots, q_n) =$$

$$= R(\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n, \lim d_n, \ldots, \lim q_n).$$

45. Az előbbiek alapján igazoljuk, hogy a hatványozás művelete is felcserélhető sor rendben a határátmenet műveletével!

46. Mutassuk meg, hogy a gyökvonás és általában a törtkitevőre történő hatványozás a határátmenet műveletével sorrendre felcserélhető! (L. hátul!)

47. Mi a határértéke az

$$a_n = \frac{\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^5 - \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^5}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}}$$

sorozatnak?

48. Mi a határértéke az

$$u_n = \frac{\left(3-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(5+\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{\cos n - \sin^3 n}{n}+2\right)}{\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n^3}\right)\left(6+\frac{1}{n^{100}}\right)}$$

sorozatnak?

49. Mi a határértéke az $x_n = \sqrt{1+\frac{3}{n}}$ sorozatnak?

50. Adjunk meg a 49. f.-hoz az $\varepsilon = 0{,}1$-nek, az $\varepsilon = 10^{-5}$-nek megfelelő n_0 értékeket, azaz olyanokat, amelyekre teljesül az $\left|x - \sqrt{1+\frac{3}{n}}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenség, ha $n > n_0$. (Itt x a sorozat határértékét jelenti!)

51. Jelentsen a, illetve b tetszés szerinti számokat. Igazoljuk a következő állításokat.

1. Ha

$$x_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n; \qquad y_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+1},$$

akkor az (x_n/y_n) intervallumskatulyázást alkot!

2. Ha a (c_n) sorozat monoton 0-sorozat, akkor az

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

és az

$$\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^n$$

sorozatok határértéke megegyezik.

3. Hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a+b}{n}\right)^n.$$

4. Hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^a.$$

Megoldás:

a) 1. Igazolása ugyanúgy történik, mint a 20. feladatban.

b) 2. Igazolása céljából először azt mutassuk meg, hogy a következő egyenlőség érvényes:

$$(a^n - b^n) = (a-b)[a^{(n-1)} + a^{(n-2)} \cdot b + a^{(n-3)} \cdot b^2 + \ldots + a^2 \cdot b^{(n-3)} + a \cdot b^{(n-2)} + b^{(n-1)}],$$

ahol n természetes egész szám.

(Ezt teljes indukcióval vagy akár szorzással is könnyen igazolhatjuk!)

c) Az $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ az *a)* pontban igazoltak szerint konvergens. Ha tehát kimutatjuk, hogy az $x_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ és az $y_n = \left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^n$ sorozatok különbsége 0-sorozat, ebből következik, hogy (l. 42. f.-ot):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Írjuk tehát a különbségsorozatot:

$$y_n - x_n = \left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n.$$

Itt használjuk fel az 1. pontban említett (és igazolt) egyenlőséget:

$$y_n - x_n = \left[\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right) - \left(1+\frac{a}{n}\right)\right] \cdot \left[\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^{n-1} + \right.$$

$$+\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^{n-2} \cdot \left(1+\frac{a}{n}\right) + \left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^{n-3} \cdot \left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \ldots +$$

$$\left. +\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-3} + \left(1+\frac{a+c_n}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\right] =$$

$$= \frac{c_n}{n}\left[\left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^{n-1} + \left(1+\frac{a+c_n}{n}\right)^{n-2} \cdot \left(1+\frac{a}{n}\right) + \ldots + \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\right].$$

Mivel (c_n) zérussorozat, bizonyos, hogy létezik egy olyan $n = n_1$ index, amelytől kezdve $a+c_n < a+1$. Ennél az indexnél nagyobb n-ek esetében a zárójelben szereplő valamennyi tag kisebb $\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{n-1}$-nél; utóbbi viszont kisebb, mint $\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{n}$. Az *a)* pontban azonban kimutattuk, hogy $\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{n}$ és $\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{n+1}$ intervallumskatulyázást alkotnak, s így bármelyik n-re:

$$\left(1+\frac{a+1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{a+1}{1}\right)^{1+1} = (a+2)^2 = a^2+4a+4.$$

A zárójelben szereplő valamennyi tag kisebb ezek szerint $(a+2)^2$-nél; összesen pedig n tag van. Ennek alapján:

$$y_n - x_n \leqq \frac{c_n}{n} \cdot n(a+2)^2 = c_n(a+2)^2.$$

Tekintettel arra, hogy az a, s így $(a+2)^2$ is adott mennyiségek, c_n pedig zérussorozat, ebből következően $(y_n - x_n)$ is az. Épp ezt akartuk azonban igazolni.

d) 3-at ez előzőek segítségével könnyen igazolhatjuk.

e)
$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{a} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{na}$$

Helyettesítsünk $na = N$-t. Így $n = \frac{N}{a}$, tehát

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{an} = \left(1+\frac{a}{N}\right)^{N}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor N is minden határon túl nő. Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{a} = \lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{a}{N}\right]^{N}$$

N azonban általában nem egész számokon keresztül nő (ha pl. a irracionális, akkor N is az stb.). Hogy tehát

$$\lim\left[1+\frac{a}{N}\right]^{N} = \lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n},$$

azt igazolnunk kell. Ehhez külön kell választanunk az $a > 0$ és az $a < 0$ esetet. Előbbi esetben az alapszám: $\left(1+\frac{a}{n}\right)$ egynél nagyobb. A 20. feladatban igazoltuk, hogy egynél nagyobb alapszámnak növekvő hatványai nőnek. Ha tehát K az N-nél nagyobb legkisebb, k pedig az N-nél kisebb vagy vele egyenlő legnagyobb egész szám, akkor

$$\left(1+\frac{a}{k}\right)^{k} \leqq \left[1+\frac{a}{N}\right]^{N} < \left(1+\frac{a}{K}\right)^{K}.$$

Mivel pedig

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{a}{k}\right)^{k} = \lim_{K\to\infty}\left(1+\frac{a}{K}\right)^{K} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n},$$

azért

$$\lim_{N\to\infty}\left[1+\frac{a}{N}\right]^{N} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{a}.$$

Megoldás:

a) A Cauchy-konvergenciakritériumot használjuk fel. Ki kell tehát mutatnunk, hogy $|e^{x_1} - e^{x_2}|$ kisebb bármely ε-nál, ha $|x_1 - a|$ és $|x_2 - a|$ elegendően kicsinyek. Tegyük fel ennek igazolása közben, hogy pl. $x_1 > x_2$ (az indexeket tetszőlegesen választhatjuk, így a feltevés nem megy az általánosság rovására). Így az abszolútérték-jelet elhagyhatjuk, mert $e^{x_1} - e^{x_2}$ mennyiség bizonyosan pozitív

$$|e^{x_1} - e^{x_2}| = e^{x_1} - e^{x_2} = e^{x_2}[e^{(x_1 - x_2)} - 1].$$

b) Adjunk meg egy tetszés szerintien kicsiny ε-t. Jelöljük az $\frac{\varepsilon}{e^{x_2}}$ mennyiséget ε_1-gyel.

Tegyük fel, hogy $|x_1 - a| < \frac{1}{4}$, és $(x_2 - a) < \frac{1}{4}$. Ekkor fennál a $0 < x_1 - x_2 < 1$ egyenlőtlenség is, és így felhasználhatjuk a 10. §. *a)* 52. feladatban közölt egyenlőtlenséget. Másrészről fennáll az

$$|x_1 - x_2| < \frac{1}{2}$$

és az

$$\frac{1}{1 - (x_1 - x_2)} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

egyenlőtlenség is. Azt állítjuk, hogy a $\delta = \frac{\varepsilon_1}{4}$ választás már megfelelő.

Ugyanis:

$$e^{x_1 - x_2} < \frac{1}{1 - (x_1 - x_2)}$$

(l. 52. feladat).

így:

$$e^{(x_1 - x_2)} - 1 < \frac{1}{1 - (x_1 - x_2)} - \frac{1 - (x_1 - x_2)}{1 - (x_1 - x_2)} =$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{1 - (x_1 - x_2)} < 2(x_1 - x_2)$$

$$|x_1 - a| < \delta$$

$$|x_2 - a| < \delta$$

és $\delta = \frac{\varepsilon_1}{4}$.

A két egyenlőségből pedig kiadódik, hogy:

$$(x_1 - x_2) < 2\delta = \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\varepsilon}{e^{x_2} \cdot 2}$$

53. Adjunk meg néhány olyan sorozatot, melynek csak egyetlen sűrűsödési helye van, és mégis divergens.

54. Képezzünk egy olyan sorozatot, melynek s és s' a sűrűsödési helyük, és igazoljuk, hogy a sorozat divergens (azaz nem konvergens). (L. hátul!)

A divergens sorozatok között megkülönböztetünk határozottan divergens és határozatlanul divergens sorozatokat. Azok a sorozatok, melyeknél «elég messze menve» az elemek bármilyen, előre megadott számnál is nagyobbakká válnak; vagy pedig «elég messze menve» bármilyen kicsiny számnál is kisebbekké válnak az elemek — határozottan divergens sorozatok. Pontosabban: megadva egy bármilyen nagy H számot, találhatunk egy olyan n_0 indexet, hogy $d_n > H$, hacsak $n > n_0$; jelben:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \to \infty;$$ ill. röviden $d_n \to \infty$, ha $n \to \infty$;

vagy pedig megadva egy bármilyen kicsiny $(-H)$ számot, találhatunk egy olyan n_0 indexet, melytől kezdve: $d_n < -H$, ha $n > n_0$: jelben:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \to -\infty; \quad d_n \to -\infty, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

akkor mindkét sorozat határozottan divergens. Éspedig az első «divergál a plusz végtelenhez»; a második «divergál a mínusz végtelenhez». Amennyiben a sorozat nem konvergens és nem is határozottan divergens (a fenti értelemben), akkor határozatlanul divergens.

55. Igazoljuk, hogy egy monoton sorozat vagy konvergens, vagy határozottan divergens

b) Végtelen sorok

Amennyiben egy sorozat elemeit összeadjuk — amikor is elemek helyett jogosan használjuk a «*tag*» szót — *más szóval egy utasítás segítségével az egymáshoz adandó tagok végtelen sokaságát tudjuk képezni, akkor végtelen sorról, végtelen összegről — röviden: sorról beszélünk.* Mivel végtelen sok összeadást nem tudunk elvégezni — *a sor «összege» csak határértékfogalom lehet.*

A sor részletösszegeinek, szeleteinek hívjuk a sor első, első két, első három stb. tagjának összegét. Általában: *a sor n-edik szelete a sor első n tagjának összege. Ezek a szeletek sorozatot alkotnak.* A sorozat első eleme az első szelet: a sor első tagja. A sorozat második eleme a második szelet: a sor első két tagjának összege. A sorozat n-edik eleme az n-edik szelet: a sor első n tagjának összege stb. *A sort konvergensnek hívjuk, ha a szeleteiből alkotott sorozat konvergens*; divergens a sor, ha a szeletek sorozata divergens. *A sor összege a szeletekből alkotott sorozat* határértéke. Jelekben:

a sor: $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

a szeletek:

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad \ldots;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

az összeg:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

1. Határozzuk meg az a_1 első tagú és q hányadosú geometriai sor összegét, ha

a) $|q|<1$. b) $|q|=1$. c) $|q|>1$.

a) A véges geometriai sor összegképlete alapján a szeleteket ismerjük:

$$S_{n+1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n = a_1 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

(amit az 51. feladat *b)* alapján is könnyen igazolhatunk),

azaz:

$$S_{n+1} = a_1 \cdot \frac{q^{n+1}}{q-1} - a_1 \cdot \frac{1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} - a_1 \cdot \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_1 \frac{1}{1-q} - a_1 \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a_1 \frac{1}{1-q}\right) - \frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

hiszen, mivel $|q| < 1$, azért $q^{n+1} \to 0$, amint azt a Bernoulli-egyenlőtlenség segítségével könnyen ki tudjuk mutatni.

b) és *c)* esetben igen könnyű igazolni, hogy a sor divergens. Éspedig $q \geqq 1$ esetben határozottan, $q \leqq -1$ esetben határozatlanul divergens!

2. Konvergens-e a következő sor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Megoldás:

a) $S_1 = 1; \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2};$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + 2\frac{1}{2}.$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8} >$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + 3\frac{1}{2}.$$

Ugyanígy:

$$S_{2^k} = +\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k} >$$

$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}=$$

$$= 1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2^{k-1}}\cdot 2^{(k-2)}+2^{(k-1)}\cdot\frac{1}{2^k} = 1+k\cdot\frac{1}{2}.$$

A sor tehát határozottan divergens, $S_n \to \infty$. Jelentsen ugyanis H bármilyen nagy pozitív egész számot, $S_{2^{2H}} > H$; ugyanis az előbbiek alapján $S_{2^{2H}} > 1 + 2H\cdot\frac{1}{2} > H$. Ebből pedig állításunk következik.

3. Konvergens-e az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+-\ldots$$

sor? (L. hátul!)

4. Konvergens-e az

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

sor? (L. hátul!)

5. Konvergens-e az

$$1+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)2n}+\ldots$$

sor? (Bővebben lásd a B. VI. kötetben!)

c) Függvények határértéke és folytonossága

A függvények helyettesítési értékének fogalmát megismertük. Helyettesítési értéken kívül definiálhatjuk a határértéket is. Az $x = a$ helyen a határérték nagyságára nincs befolyással az $x = a$ helyen a helyettesítési érték (ilyen esetleg nincs is), hanem csakis az a hely környezetében levő függvényértékek: *Az $x = a$ helyen a függvény határértéke A, ha elég «közel jöve» az a helyhez, a függvényértékek bármilyen kicsi számnál is kevésbé különböznek az A-tól. Pontosabban: $x = a$ helyen A a függvény határértéke ha,* $|f(x)-A| < \varepsilon$, *hacsak* $|x-a| < \delta$. Itt ε *bármilyen kicsiny számot jelenthet.*

Ez a definíció igen hasonlít a sorozat határértékének definíciójához. ε-nak itt is ε, n_0-nak a δ felel meg. Itt ugyanúgy, mint a sorozatoknál, csak ε megadása után

tudjuk előírni δ-t. Az összefüggés azonban a sorozatok és a függvények határértéke között ennél sokkal szorosabb! Ezt a most következő néhány alapvető példa kapcsán be is fogjuk látni.

Az $y = f(x)$ függvénynek legyen az $x = a$ helyen A a határértéke. Válasszunk ki egy tetszés szerinti függetlenváltozó-értéksorozatot úgy, hogy az konvergens és határértéke éppen az a hely legyen: $x_n \to a$, ha $n \to \infty$.

1. Mutassuk ki, hogy az $f(x_1)$; $f(x_2)$; $f(x_3)$; . . . .; $f(x_n)$; . . . sorozat is konvergens, és határértéke a függvény határértékével egyezik; azaz: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Az előző feladatban (10. § c) 1.) igazolt tételt meg is lehet fordítani. Az azonban nyilvánvaló: abból, hogy valamely kiválasztott $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ sorozattal meg. közelítve az a helyet (azaz: $x_n \to a$, ha $n \to \infty$), létezik az $f(x_1)$: $f(x_2)$; . . . ; $f(x_n)$; . . . sorozatnak is határértéke, még nem következik, hogy az $f(x)$ függvénynek magának is van az a helyen határértéke. Ha azonban valamennyi olyan (x_n); (y_n); (u_n); . . . sorozat esetén, amelynek a a határértéke, konvergensek a megfelelő függvényértékekből alkotott sorozatok: $f(x_1)$; $f(x_2)$; . . . , illetve $f(y_1)$; $f(y_2)$; . . . , illetve $f(z_1)$; $f(z_2)$; . . . stb. is, akkor már valamennyinek ugyanaz az A szám a határértéke. Ez az A szám egyben az $f(x)$ függvény határértéke is az a helyen.

2. Igazoljuk az előző két mondat állítását. (L. hátul!)

Megtörténik az is, hogy az előbbi sorozatok nem mind konvergensek; csak azok, amelyekben az (x_n); (y_n); stb. sorozat elemei vagy kizárólag az $x = a$ helytől jobbra levő értékekből állanak, vagy kizárólag tőle balra lettek választva. Az ilyen sorozatoknak azonban már ugyanaz a határértékük — az egyik csoporté pl. A, a másiké pl. B. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a *függvénynek az $x = a$ helyen nincs határértéke; de van jobb oldalról vett határértéke: A* (amikor az (x_n) stb. sorozat elemei kizárólag az a helytől jobbra vannak), *és van bal oldali határértéke: B* (az (x_n) stb. sorozat elemei az a helytől balra lettek választva). Az eredeti definícióhoz visszatérve ezt így jelölhetjük:

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1, \quad \text{ha} \quad |x - a| < \delta_1 \quad \text{és} \quad x > a,$$

illetve

$$|f(x) - B| < \varepsilon_2, \quad \text{ha} \quad |x - a| < \delta_2 \quad \text{és} \quad x < a.$$

Azokon a helyeken, *ahol a jobb és a bal oldali határérték és a helyettesítési érték egyezik, — ott a függvény folytonos.* Ahol nincs határérték, vagy pedig nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, ott a függvénynek *szakadása* van. Éspedig ún. *megsüntethető* a szakadás, ha van határérték, de más, mint a helyettesítési érték. (Ti. ha a helyettesítési értéket — a függvényértéket — úgy definiáljuk, hogy megegyezzék a határértékkel, megszűnik a szakadás.) Amennyiben határérték nincs, de van jobb és bal oldali határérték (amelyek természetesen nem egyeznek meg), akkor *«elsőfajú»* a szakadás; ha akár a bal oldali, akár a jobb oldali határérték nem létezik (vagy egyik sem), akkor *«másodfajú»* a szakadás.

Az előző (10. § c) 12.) feladatok alapján tehát a függvény konvergenciájának vizsgálatát és határértékének megállapítását sorozatok vizsgálatára tudjuk visszavezetni. Ebből következik, hogy mindazok a tételek, amelyeket a sorozatokkal kapcsolatosan megismertünk, függvények határértékének vizsgálatánál is alkalmazhatók. Így elsősorban a Cauchy-féle konvergenciakritérium, amelynek döntő előnye, hogy nem szerepel benne az ismeretlen határérték — függvények esetére így fogalmazható meg:

Az $y = f(x)$ függvény az $x = a$ helyen folytonos, ha bármilyen kicsi ε-hoz meg tudjuk adni a δ számot úgy, hogy $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, ha $|x_2 - a| < \delta$ és $|x_1 - a| < \delta$, (itt x_1 és x_2 bármilyen értéket felvehet egyébként a kijelölt környezetben).

3. Igazoljuk, hogy a fenti kritérium teljesülése szükséges és elégséges feltétele az $f(x)$ függvény $x = a$ helyén a folytonosságnak.

Azonnal beláthatjuk másrészről, hogy függvényeknél is, *akárcsak a sorozatok esetében, a határátmenet művelete a négy alapművelettel sorrendre felcserélhető* — hacsak így nem kell 0-val osztani. Sőt — a gyökvonással is felcserélhető a határátmenet művelete, amiről a

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

egyenlet mindkét oldalának hatványozásával azonnal meggyőződhetünk.

Abban az esetben viszont, ha egy tört nevezőjének az $x = a$ helyen 0 a határértéke, két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. Ha a számláló határértéke nem 0 ugyanezen a helyen, akkor a tört minden határon túl nő, illetve csökken (az előjelviszonyoktól függően), amikor megközelítjük a kérdéses helyet – feltéve, hogy ezen hely elég kis környezetében legfeljebb egy előjelváltást találunk. Ha azonban az $x = a$ hely bármilyen kis környezetében a tört többször változtatja előjelét, akkor általában nincs határértéke. (Ez az eset egyébként részletesebb, mélyebb vizsgálatot igényel. Az A VI. fejezetben foglalkozunk ezzel!)

2. Ha viszont az $x = a$ helyen a számláló határértéke is 0, akkor egyéb módszerekkel – az egész törtet együttesen vizsgálva – kell a határértéket megállapítani. Erre néhány példát kidolgozunk.

4. Folytonos-e mindenütt az $y = x^7$ függvény?

Megoldás:

a) Az $y = x^7$ függvénynek az $x = a$ helyén megkeressük a határértékét, azután megvizsgáljuk, egyezik-e ez a helyettesítési értékkel. A függvény ugyanis csak akkor folytonos, ha határértéke létezik, és egyezik a helyettesítési értékkel. Mivel az a tetszőleges értéket jelenthet a vizsgálatok folyamán, egyben azt is kimutathatjuk, hogy az x^2 mindenütt folytonos.

b)
$$\lim_{x\to a}(x^7) = [\lim_{x\to a} x]^7.$$

hiszen a határátmenet művelete az alapműveletekkel sorrendre felcserélhető

Az $y = x$ függvény azonban bizonyosan folytonos mindenütt, azaz határértéke helyettesítési értékével megegyezik. Erről a definíció alapján, $\varepsilon = \delta$ választással azonnal meggyőződhetünk: $|x-a| < \varepsilon$, hacsak $|x-a| < \delta = \varepsilon$, ami nyilván teljesül.

Ennek következtében

$$\lim_{x\to a}(x^7) = [\lim_{x\to a} x]^7 = a^7 = y(a).$$

A függvény tehát mindenütt folytonos.

5. Igazoljuk, hogy az $y = P_n(x)$ n-edfokú polinom mindenütt folytonos.

$$(P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0).$$

6. Mutassuk ki, hogy az $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ racionális törtfüggvény mindenütt folytonos, ahol a nevezőnek nincs gyökhelye, azaz minden olyan $x = a$ helyen, ahol $Q(x) \neq 0$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények hol nem folytonosak. Milyen jellegű a szakadásuk?

7. $y = \dfrac{x-3}{5-x}$ **8.** $y = \dfrac{3x^5}{x(x^2-5x+4)}$

9. $y = \dfrac{1,3x}{x^3-x}$

10. Mutassuk ki, hogy az e^x függvény mindenütt folytonos!

Megoldás:

a) A Cauchy-konvergenciakritériumot használjuk fel. Ki kell tehát mutatnunk, hogy $|e^{x_1}-e^{x_2}|$ kisebb bármely ε-nál, ha $|x_1-a|$ és $|x_2-a|$ elegendően kicsinyek. Tegyük fel ennek igazolása közben, hogy pl. $x_1 > x_2$ (az indexeket tetszőlegesen választhatjuk, így a feltevés nem megy az általánosság rovására). Így az abszolútérték-jelet elhagyhatjuk, mert $e^{x_1}-e^{x_2}$ mennyiség bizonyosan pozitív.

$$|e^{x_1}-e^{x_2}| = e^{x_1}-e^{x_2} = e^{x_2}[e^{(x_1-x_2)}-1]$$

b) Adjunk meg egy tetszés szerintien kicsiny ε-t. Jelöljük az $\frac{\varepsilon}{e^{x_2}}$ mennyiséget ε_1-gyel.

Legyük fel, hogy $|x_1-a| < \frac{1}{4}$, és $(x_2-a) < \frac{1}{4}$. Ekkor fennáll a $0 < x_1-x_2 < 1$ egyenlőtlenség is, és így felhasználhatjuk a 10. § *a)* 52. eladatban közölt egyenlőtlenséget. Másrészről fennáll az

$$|x_1-x_2| < \frac{1}{2}$$

és az

$$\frac{1}{1-(x_1-x_2)} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

egyenlőtlenség is. Azt állítjuk, hogy a $\delta = \frac{\varepsilon_1}{4}$ választás már megfelelő.

Ugyanis:

$$e^{x_1-x_2} < \frac{1}{1-(x_1-x_2)}$$

(l. 52. feladat).

igy:

$$e^{(x_1-x_2)}-1 < \frac{1}{1-(x_1-x_2)} - \frac{1-(x_1-x_2)}{1-(x_1-x_2)} =$$

$$= \frac{x_1-x_2}{1-(x_1-x_2)} < 2(x_1-x_2)$$

$$|x_1-a| < \delta$$

$$|x_2-a| < \delta$$

és $\delta = \frac{\varepsilon_1}{4}$.

A két egyenlőéből pedig kidódik, hogy:

$$(x_1-x_2) < 2\delta = \frac{\varepsilon_1}{2} = \frac{\varepsilon}{e^{x_2}\cdot 2}.$$

Vagyis:

$$e^{(x_1-x_2)} - 1 < \frac{\varepsilon}{e^{x_2} \cdot 2} \cdot 2.$$

Egyszerűsítve és átszorozva:

$$e^{x_2}[e^{(x_1-x_2)} - 1] < \varepsilon.$$

Épp ezt kellett igazolnunk!

Az e^x függvény tehát mindenütt folytonos.

11. Mutassuk ki, hogy az $y = \sin x$ függvény mindenütt folytonos.

12. Igazoljuk, hogy az $y = \cos x$ függvény mindenütt folytonos.

13. Vizsgáljuk az $y = 2^{\frac{1}{x}}$ függvényt folytonosság szempontjából.

Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából:

14. $y = 2^{\frac{1}{1-x_2}}$ 15. $y = \ln x$. 16. $y = \frac{e^{3x} - e^{2x} + 1}{2x(e^x - 1)}$.

17. Határozzuk meg az $\frac{e^x - 1}{x}$ függvény határértékét az $x = 0$ helyen!

Megoldás:

a) A függvény határértékét azért nehéz az $x = 0$ helyen megkeresni, mert a számláló és a nevező határértéke is 0. A törtet egészében kell tehát vizsgálnunk.

Segítségünkre jönnek azok a relációk, amelyeket a 10. feladatban ismertünk meg:

$$1 + a \leqq e^a \leqq \frac{1}{1-a},$$

hacsak $|a| \leqq 1$.

Ha tehát az $x = 0$ helynek elég kicsi (egynél kisebb sugarú) környezetében vagyunk, akkor:

$$1 + x \leqq e^x \leqq \frac{1}{1-x}.$$

Ezen alak segítségével ki tudjuk mutatni, hogy a tört határértéke: 1. Csak úgy kell rendeznünk az egyenlőtlenségeket, hogy meg tudjuk becsülni az $\frac{e^x - 1}{x}$ tört értékeit az $x = 0$ hely környezetében.

Első lépésként az előző reláció mindegyik oldalából egyet kivonunk, majd x-szel osztunk. Itt azonban figyelembe kell vennünk, hogy $x < 0$ esetében az osztás következtében az «egyenlőtlenségek megfordulnak»!:

$$1+x-1 \leqq e^x-1 \leqq \frac{1}{1-x}-\frac{1-x}{1-x};$$

$$x \leqq e^x-1 \leqq \frac{x}{1-x};$$

$$1 \leqq \frac{e^x-1}{x} \leqq \frac{1}{1-x} \qquad (\text{ha } 1 > x > 0),$$

illetve

$$1 \geqq \frac{e^x-1}{x} \geqq \frac{1}{1-x} \qquad (\text{ha } -1 < x < 0).$$

Most már elvégezhetjük az $x \to 0$ határátmenetet. Ugyanis az $\frac{e^x-1}{x}$ törtet mindkét egyenlőtlenségcsoportban olyan kifejezések közé «szorítottuk», amelyeknek egyrészt könnyen, elemien számítható a határértékük, másrészt *ugyanaz* a határértékük. Így csak ez lehet a «közéjük szorított» kifejezés határértéke is. (Ezt az eljárást a későbbiek folyamán igen gyakran alkalmazhatjuk.)

Így:

$$1 \leqq \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \leqq \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \qquad (x \geqq 0).$$

$$1 \geqq \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \geqq \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \qquad (x \leqq 0).$$

Amiből kiolvashatjuk, hogy az $y = \frac{e^x-1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ helyen van bal oldali és jobb oldali határértéke is, és ezek egyenlőek. Az $y = \frac{e^x-1}{x}$ függvénynek tehát az $x = 0$ helyen megszüntethető szakadása van, mert határértéke létezik, helyettesítési értéke viszont nem. Ha ezt is definiáljuk (éspedig: $y(0) = 1$), akkor folytonossá válik.

18. Határozzuk meg az $y = \frac{\sin x}{x}$ függvénynek az $x = 0$ helyen a határértékét.

Határozzuk meg az alábbi függvények határértékét (ezeknél a függvényeknél az jelenti a határérték-meghatározás nehézségét, hogy az összetett függvény egyes részeinek határértékét ugyan könnyen számolhatjuk, de az így kapott kifejezés értelmetlen, azaz az egész kifejezést együtt kell vizsgálni):

19. $y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} y = ?$ **20.** $z = \cos\frac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} z = ?$ (L. hátul!)

21. $v = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0} v = ?$ (L. hátul!)

Az eddig bemutatott eljárások felhasználhatóak a függvények aszimptotáinak (azaz az $x \to \infty$ határátmenet eredményének) megállapításához is. Ez abból következik, hogy az (x_k); (y_k); (z_k); stb. sorozatokat — amelyekhez tartozó függvényérték-sorozatok segítségével határoztuk meg a függvény határértékét — úgy választhatjuk, hogy a sorozatok (ti. a független változó értékeiből készített sorozatok) valamennyien divergensek — és-

pedig határozottan divergensek legyenek. Amennyiben *valamennyi* ilyen divergens sorozathoz tartozó $[f(x_n)]$; $[f(y_n)]$; ... sorozat konvergens (vagy határozottan divergens), akkor ismét igazolhatjuk, hogy közös a határértékük – és ez a függvény határértéke is az $x \to \infty$ esetén! A követett módszert egyébként a 6. §-ból már ismerjük.

22. Mi az $y = \dfrac{3x^2-7}{x^2+5}$ függvény határértéke, ha x minden határon túl nő?

Megoldás:

a) Számlálót és nevezőt x^2-tel végigosztva, a következő kifejezést kapjuk:

$$y = \frac{3-\frac{7}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}}$$

Ez az érték pedig a $\frac{3}{1} = 3$-től bármilyen kis ε-nál is kevesebbet különbözik, ha $|x$ elég nagy. Ezt könnyen be tudjuk látni, mivel a számláló és nevező határértékét azokon belül pedig az egyes tagokét külön-külön állapíthatjuk meg.

(Meg kell jegyeznünk, hogy *nemcsak a függvények határértékének vizsgálatát vezethetjük vissza sorozatokéra, hanem fordítva is tehetjük.* Tekintettel arra azonban, hogy n csak az egész számokon keresztül nőhet, abból, hogy a függvénynek nincs határértéke, még nem következik, hogy akkor sincs határérték, ha a független változó csak az egész számokon keresztül nő minden határon túl; azaz a sorozat esetleg ennek ellenére is konvergens lehet. (Pl. az $y = \sin 2\pi x$ függvénynek nincs határértéke, ha $x \to \infty$, ekkor ugyanis x elég nagy értékeinél is minden -1 és $+1$ közé eső értéket felvesz a függvény. Ezzel szemben az $a_n = \sin 2\pi n$ sorozatnak nyilván van határértéke, éspedig $a_n \to 0$. (Ti. $a_n = 0$ bármilyen egész számot jelent is n!)

Most még néhány, a folytonos függvényekre vonatkozó alapvető tételt ismerünk meg.

23. Legyen $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ szakaszon folytonos függvény. Az $x = a$ helyen felvett függvényérték $f(a)$ legyen ellenkező előjelű, mint $x = b$ helyen felvett $f(b)$. Igazoljuk, hogy közben a függvény legalább egyszer felveszi a 0 értéket, azaz van az a és a b helyek között egy olyan ξ hely $(a < \xi < b)$, hogy $f(\xi) = 0$ (Bolzano tétele).

23. Bizonyítsuk be (az előző feladat alapján) a következő tételt: jelentsen az $y = f(x)$ egy az $a \leqq x \leqq b$ zárt szakaszon folytonos (és korlátos) függvényt. Ez a függvény bármilyen – az $f(a)$ és $f(b)$ értékek közé eső – értéket legalább egyszer felvesz az $[a, b]$ zárt intervallum belsejében.

25. Mutassuk ki – az előző (10. § *c)* 24.) feladatban kimondott tétel segítségével, hogy bármely páratlan fokú algebrai (racionális polinomból képzett) egyenletnek legalább egy gyöke van!

26. Az $y = f(x)$ függvény az $a \leqq x \leqq b$ zárt szakaszon folytonos (és korlátos). Igazoljuk, hogy ha a függvény ezen a zárt szakaszon a zérus értéket tetszés szerint megközelíti, akkor – legalább egy helyen – fel is veszi: azaz létezik olyan ξ hely, ahol $f(\xi) = 0$, és amely a következő egyenlőtlenségnek is eleget tesz: $a \leqq \xi \leqq b$. (L. hátul!)

27. Mutassuk meg, hogy az $a \leqq x \leqq b$ zárt szakaszon folytonos $y = f(x)$ függvény ezen zárt szakasz belsejében, vagy a szélső pontokban a (szakaszra vonatkozó) legnagyobb M és legkisebb m értékét nemcsak tetszés szerint megközelíti, hanem egy ξ_1, illetve egy ξ_2 helyen valóban fel is veszi. Itt $a \leqq \xi_1 \leqq b$ és $a \leqq \xi_2 \leqq b$. (L. hátul!)

ÖTÖDIK RÉSZ

EREDMÉNYTÁR

1. § *a) α)* és *β)*

5. $y(2{,}5) \cong 1{,}7$; $y(3{,}5) \cong -1{,}2$; $y(4{,}5) \cong -2{,}4$; $y(5{,}5) \cong -2{,}7$.

7. Az $x_1 \cong -1{,}7$; az $x_2 \cong -0{,}28$; az $x_3 \cong 3{,}1$ és az $x_4 \cong 4{,}6$ helyek a függvény 0 helyei, azaz

$$y(x_1) = y(x_2) = y(x_3) = y(x_4) = 0.$$

$$y(x) < 0 \begin{cases} \text{ha } -1{,}7 \cong x_1 < x < x_2 \cong -0{,}28. \\ \text{ha } 3{,}1 \cong x_3 < x < x_4 \cong 4{,}6. \end{cases}$$

$$y(x) > 0 \begin{cases} \text{ha } \alpha < x < x_1 \cong -1{,}7. \\ \text{ha } -0{,}28 \cong x_2 < x < x_3 \cong 3{,}1. \\ \text{ha } 4{,}6 \cong x_4 < x \cong \beta. \end{cases}$$

8.

Az	$x_1 \cong -1{,}35$	helyen	$y(x_1) = 2$		
Az	$x_2 \cong -0{,}35$	és az	$x_3 \cong 3$	helyen	$y(x_2) = y(x_3) = 0{,}5.$
Az	$x_4 \cong -0{,}2$	és az	$x_5 \cong 2{,}8$	helyen	$y(x_4) = y(x_5) = 0.$
Az	$x_6 \cong 0{,}45$	és az	$x_7 \cong 2{,}4$	helyen	$y(x_6) = y(x_7) = -1{,}5.$
Az	$x_8 \cong 0{,}6$	és az	$x_9 \cong 2{,}2$	helyen	$y(x_8) = y(x_9) = -2.$
Az	$x_{10} \cong 1{,}5$	helyen	$y(x_{10}) = -3.$		

9. Az $x_4 \cong -0{,}2$; az $x_5 \cong 2{,}8$ helyeken a függvény előjelét váltja.

Az $x \cong -1{,}35$ helyen környezeti maximumot, az $x \cong 1{,}5$ helyen környezeti minimumot találunk.

29. A görbe azért szimmetrikus az y tengelyre, mert az origóra szimmetrikusan kiválasztott tetszés szerinti $x_1 = a$; $x_2 = -a$ abszcisszához mindig ugyanaz az ordináta (függvényérték) tartozik.

Ti. $$\frac{1}{(-a)^2} = \frac{1}{a^2}.$$

A grafikont lásd a 126. ábrán!

1. § *b) α)*

2. $$\varphi(1) = 0; \quad \varphi(a) = a^3 - 1; \quad \varphi(a+1) = a^3 + 3a^2 + 3a;$$
$$\varphi(a-1) = a^3 - 3a^2 + 3a - 2.$$

4. $f(0) = 0$; $f(1) = a$; $f(-1) = -\frac{1}{a}$; $f\left(\frac{1}{a}\right) = a^{\frac{1-a}{a}}$;

$f(a) = a^{a+1}$; $f(-a) = -a^{1-a}$.

5. $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 4$; $\varphi(b) = \frac{1}{b^2}$; $\varphi\left(\frac{1}{b}\right) = b^2$; $\varphi(\sqrt{b}) = \frac{1}{b}$.

7. $\varphi(t^2) = t^6 + 1$; $[\varphi(t)]^2 = t + 2t^3 + 1$; $\varphi(t^2) \neq [\varphi(t)]^2$.

8. $F(a) = a^4 - 2a^2 + 5$; $F(-a) = (-a)^4 - 2(-a)^4 + 5 = a^4 - 2a^2 + 5 = F(a)$.

9. $\Phi(-z) = (-z)^5 - 5(-z) = -z^3 + 5z = -(z^3 - 5z) = -\Phi(z)$.

10. $$f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{5}{\frac{1}{t}} + \frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} + 5 \cdot \left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t^2} + 5t + 2t^2 + \frac{5}{t} =$$

$$= 2t^2 + \frac{5}{t} + \frac{2}{t^2} + 5t = f(t).$$

12. $\mu = \varphi(z) = z + a$. Geometriai jelentése: az $x = a$ és a (tetszés szerinti) $x = z$ abszcisszájú pontokon áthaladó szelő iránytangensét adja meg az $u = \varphi(z)$ függvény!

1. § *b) β)*

3. $\mu = \varphi(x) = \sqrt{1 + (\log \sin x)^2} \equiv \sqrt{1 + \log^2 \sin x}$

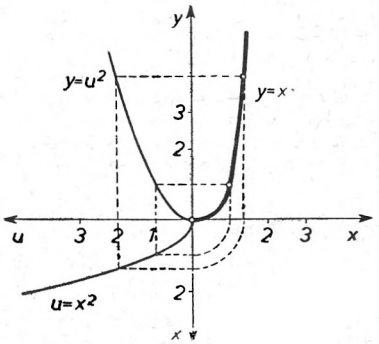
4. $v = F(x) = \sin^2(1 + x)$.

6. $y = u^{\frac{2}{3}}$; $u = 1 + x$.

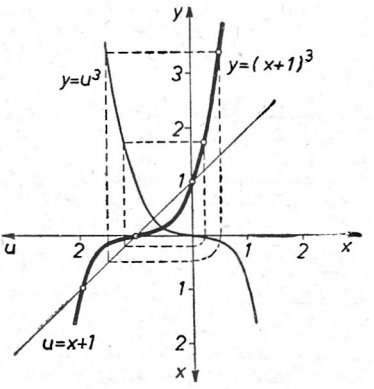
7. $y = t^3$; $t = \sin v$; $v = 2x + 1$.

8. L. a 94. ábrát!

9. L. a 95. ábrát!



94. ábra



95. ábra

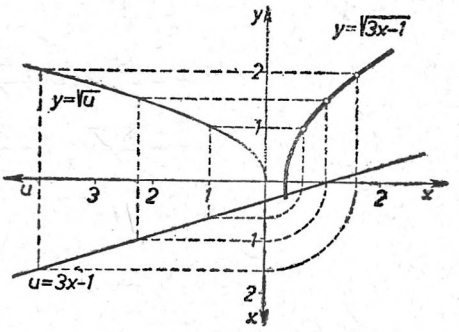
10. L. a 96. ábrát!

11. $y = \log p$; $p = r^2$; $r = \operatorname{tg} s$; $s = 3x - 1$.

12. $y = 5\mu$ $u = v^2$; $v = 3x + 1$.

13. $y = t^{\frac{2}{3}}$; $t = 1 + w$; $w = a^x$; $z = v$; $v = \operatorname{tg} s$; $s = x + 1$.

14. $y = p^3$; $p = \operatorname{tg} w$; $r = a^s$; $s = \sqrt{1 - t}$; $t = 9x^2$.



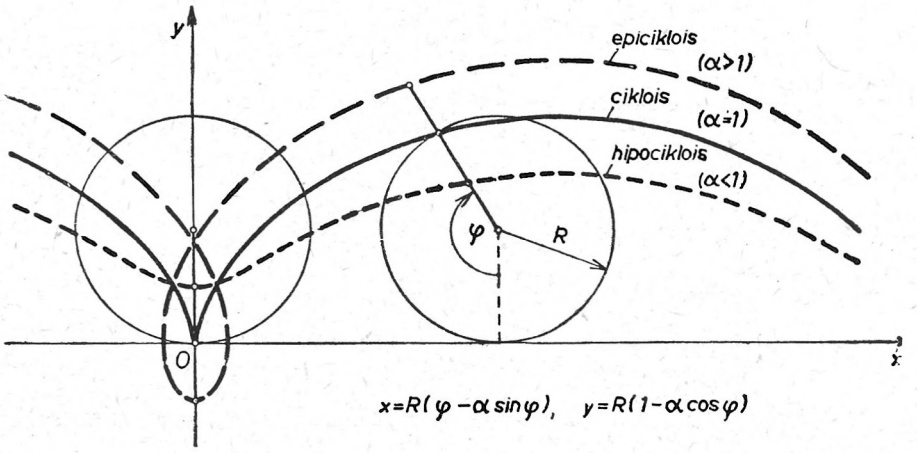
96. ábra

1. § c) α)

3. $x = R\,[\varphi - \sin\varphi],$
$y = R\;\;1 - \cos\varphi].$

4. $x = R[\varphi - \alpha \cdot \sin\varphi], \quad \alpha < 1.$
$y = R[1 - \alpha \cdot \cos\varphi].$

A görbét lásd a 97. ábrán.



97. ábra*

5. $x = R[\varphi - \alpha \cdot \sin\varphi],$
$y = R[1 - \alpha \cdot \cos\varphi];$ $\alpha < 1.$ (L. a 97. ábrát!)

6. $$\begin{cases} y = \dfrac{b}{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}} = \dfrac{b \cdot \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}, \\ x = \dfrac{b}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\alpha}. \end{cases}$$

*Epiciklois: helyesen hurkolt ciklois; hipociklois: helyesen nyújtott ciklois.

7. $y = k \cdot \cos\varphi.$
$x = k \cdot \sin\varphi + a \cdot \operatorname{tg}\varphi.$

8. $x = t\left[1 + \frac{k}{\sqrt{a^2+t^2}}\right];$
$y = \frac{a \cdot k}{\sqrt{a^2+t^2}}.$

9. $x = \frac{3R}{4}\cos\varphi + \frac{R}{4} \cdot \cos 3\varphi.$
$y = \frac{3R}{4}\sin\varphi - \frac{R}{4}\sin 3\varphi;$

A későbbiekben (8. §-ban) tanult összefüggések alapján könnyen ki tudjuk mutatni a következő két relációt:

$$\frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi = \sin^3\varphi.$$

$$\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi = \cos^3\varphi.$$

(Pl. így: $\cos^3\varphi = \cos\varphi \cdot \cos^2\varphi = \cos\varphi \cdot \frac{1+\cos 2\varphi}{2} =$

$$= \frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\cos\varphi \cdot \cos 2\varphi}{2} = \frac{\cos\varphi}{2} + \frac{\frac{1}{2}[\cos 3\varphi + \cos\varphi]}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4}\cos 3\varphi.$$

Qu. e. d. stb.)

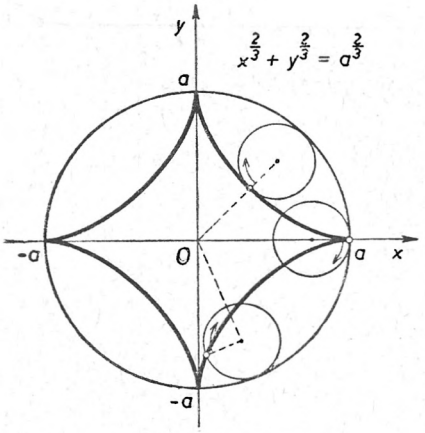
Ezek alapján:

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos^3\varphi \\ y = R \cdot \sin^3\varphi \end{cases}$$

az astrois egyenlete.

1. § c) β)

2. $x = R \cdot \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{y}{R}\right) - \sqrt{2Ry - y^2}.$



98. ábra

4. $x = k \cdot \frac{\pi}{2} - y + a \cdot \frac{\sqrt{k^2-y^2}}{y}.$

5. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$: (L. a 98. ábrától)

8. Pl. $x = \frac{3t}{1+t^4}$ $y = \frac{3t^2}{1+t^4}$

a megfelelő $y = tx$ helyettesítéssel.

9. Pl. az $y = \frac{t}{x}$ helyettesítéssel.

$$x = -\frac{t^3+1}{10t}$$

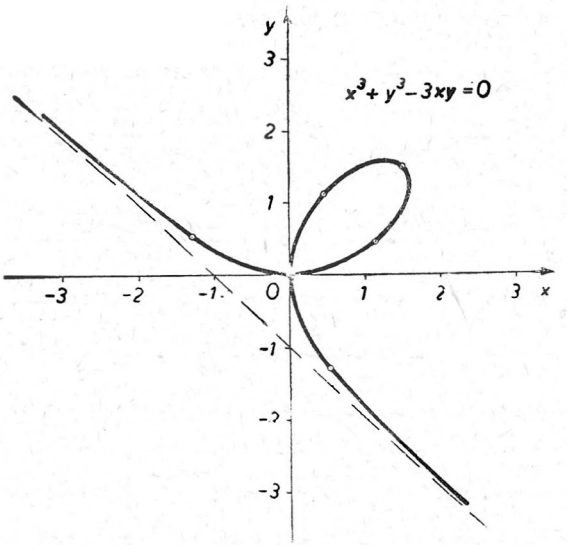
$$y = -\frac{10t^2}{t^3+1}$$

10. Az $y = tx$ helyettesítéssel

$$x = \frac{3at}{1+t^3}$$

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

(L. a 99. ábrát.)



99. ábra

2. § a)

3. Értelmezési tartomány: $-3 < x < 8$; értékkészlet: $-\infty < y < \infty$

4. Értelmezési tartomány: $-\infty < x \leqq 2{,}5$; értékkészlet: $-\infty < y \leqq \infty$.

7. Értelmezési tartománya $-\infty < x < \infty$ nyílt köz, értékkészlete a $0 < y \leqq 1$ (ún. felülről zárt, alulról nyitott) tartomány.

8. Mindenütt értelmezett, kivéve a nevező 0 helyeit. Az értelmezési tartomány tehát a $-\infty < x < 1$, az $1 < x < 2$ és a $2 < x < \infty$ nyílt intervallumokból áll. Értékkészlete a $-\infty < y < \infty$ közt öleli fel.

9. Mindenütt értelmezett, ahol $x^2 - 4x + 3 \leqq 0$, tehát mindenütt, kivéve az $1 < x < 3$ nyílt közt (itt ti. a polinom helyettesítési értékű negatívok – a polinomot ábrázoló másodfokú parabola itt az abszcisszatengely alatt jár).

Értelmezési tartomány tehát a $-\infty < x \leqq 1$ és a $3 \leqq x < \infty$ intervallum, értékkészlete pedig – attól függően, hogy a kétértékű gyökvonás, melyik előjelét tekintjük – a $0 \leqq y < \infty$; a $-\infty < y \leqq 0$; vagy pedig mindkét intervallumot felöleli.

10. Értékkészlet: $a - \infty < y < \infty$ közt öleli fel.

11. Mindenütt értelmezett, kivéve az $x = 0$ és $x = 1$ értékeket. Értelmezési tartománya tehát $a - \infty < x < 0$, a $0 < x < 1$ és az $1 < x < \infty$ nyílt közökből áll, értékkészlete pedig a $-\infty < y < 0$ és a $0 < y < \infty$ közökből.

12. Értékkészlete a $-\infty < y < \infty$ közt öleli fel.

13. Szükséges, hogy $\frac{5x-x^2}{4} \leqq 1$ legyen. Ha ugyanis az argumentum egynél nagyobb, logaritmusa pozitív, amelyből negyzetgyököt vonhatunk.

Azaz szükséges, hogy $5x-x^2 \leqq 4$, tehát $x^2-5x+4 \leqq 0$ legyen. Értelmezési tartomány tehát az $1 \leqq x \leqq 4$ zárt köz. Tekintettel arra, hogy az $\frac{5x-x^2}{4}$ kifejezés legnagyobb értékét az $x = 2{,}5$ helyen veszi fel (lásd az 5. § *c)*-ben), éspedig itt 1,5625 az értéke, az értékkészlet a $0 \leqq y \leqq \sqrt{\log 1{,}5625}$, illetve a $-\sqrt{\log 1{,}5625} \leqq y \leqq 0$, illetve mindkét zárt intervallumot felöleli, attól függően, hogy a kétértékű gyökvonás melyik előjelét vesszük figyelembe.

14. Szükseges, hogy $ax^2+bx+c > 0$ legyen. Így az értelmezési tartomány vagy a

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < x < \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

vagy pedig a és a

$$-\infty < x < \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{és} \quad \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < x < \infty$$

nyílt közökből áll, aszerint, hogy $a < 0$, vagy $a > 0$. Értékkészlete az $a < 0$ esetben a

$$-\infty < y \leqq \log \frac{4ac-b^2}{4a},$$

az $a > 0$ esetben pedig a $-\infty < y < \infty$ intervallumot öleli fel. (Lásd 5. § *c)*-ben).

15. Értékkészlete a $0 \leqq y \leqq \pi$ zárt közt öleli fel. (Lásd a 5. §-ban.)

16. Értelmezési tartománya: $2 \leqq x \leqq 3$; értékkészlete: $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$

17. Értelmezési tartománya: $0 \leqq 0 \leqq 1$; értékkészlete: $-\infty < y < \infty$ (L. 8. §-t.)

18. Értelmezési tartománya: $-4 \leqq x \leqq 4$; értékkészlete: $-\infty < y < \infty$

19. Értelmezési tartománya: $-\frac{3}{2} \leqq x \leqq \frac{5}{2}$; értékkészlete: $-\infty < y < \infty$

20. Értelmezési tartománya: $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$; értékkészlete: $-\infty < y < \infty$

21. Értékkészlete: $-\infty < y < \infty$.

22. Értelmezési tartománya a $-\infty < x < -2$, a $-2 < x < 0$, az $1 < x < 2$ és a $2 < x < \infty$ intervallumokból áll, értékkészlete a $-\infty < y < \infty$ közt öleli fel.

23. Értékkészlet: $-\infty < y < \infty$.

24. Értelmezési tartománya az $1{,}5 < x < 2$ és a $2 < x < \infty$ közökből, értéktartománya a $-\infty < y < \infty$ közökből áll.

25. Értelmezési tartománya a $-2 \leqq x < 0$ és a $0 < x < 1$ intervallumokból áll (az $x = 0$ helyen az első tag: $\frac{1}{\log(1-x)}$ nem értelmezett!!), értéktartománya pedig a $-\infty < y < \infty$ közből.

26. Értelmezési tartománya a $-\infty < x < 0$ és a $4 < x < \infty$ közökből, értéktartománya pedig – a négyzetgyökvonás figyelembe vett előjele szerint – a $-\infty < y < 0$, illetve a $0 < y < \infty$, illetve mindkét intervallumból áll.

27. Értelmezési tartomány: az $1 \leqq x < 4$ (alulról zárt, felülről nyitott) intervallum, értékkészlet: $-\infty < y < \infty$.

28. Értelmezési tartomány: $-\infty < x < -1$ és $1 < x < \infty$. Értékkészlet: $-\infty < y < \infty$.

33. A függvény grafikonja – jól ismerjük – egyenes. Így már a szemlélet azonnal mutatja, hogy az értékkészlet: $-\infty < y < \infty$.

34. Értékkészlet: $0 \leqq y < \infty$.

35. Értékkészlet: $-4 \leqq y < \infty$. (Lásd 5. § c) is.)

36. A 12. ábrára egy pillantást vetve, látható, hogy az értékkészlet a $-\infty < y < \infty$ közt öleli fel.

37. Értelmezési tartomány: $-\infty < x < \infty$; értékkészlet: $0 < y < \infty$. (Lásd 9. és 10. §-ban is az exp. függvény értelmezését.)

38. Értékkészlete a $-1 \leqq y \leqq 1$ (zárt) intervallumot öleli fel.

39. Értelmezési tartomány: $\frac{3}{2} < x < \infty$; értékkészlet: $-\infty < y < \infty$.

2. § b) α)

2. A cos x függvény geometriai definíciójából következik (l. 8. § a)), hogy negatív szögek és velük egyenlő pozitív szögek cosinusai megegyeznek. Így

$$2\cos[3(-x)] = 2\cos(-3x) = 2\cos 3x$$

3. A függvény páros, mert $(-x)^2 = x^2$; így $2^{-(-x)^2} = 2^{-x^2}$.

4. Sem a 10^x, sem a 10^{-x} függvény nem mutat szimmetriatulajdonságokat (l. 9. §); a kettő összege azonban nyilván igen: az összeg ugyanis kommutatív, azaz:

$$f(x) = 10^x + 10^{-x} \equiv 10^{-x} + 10^x = f(-x)$$

Így:

$$\frac{f(x)}{2} = y(x) = \frac{f(-x)}{2} = y(-x)$$

5. Lásd a 3. feladat indokolását.

6. Lásd a 3. feladat indokolását.

7. $$y(-y) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = y(x)$$

Az, hogy $\sin(-x) = -\sin x$, a szögfüggvények geometriai definíciójából azonnal következik. (L. 8. §)

8. Az abszolút érték definíciója szerint $|x| = |-x|$.

2. § b) β)

1. $$y(-x) = (-x) - \frac{(-x)^3}{6} + \frac{(-x)^5}{120} = -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} =$$

$$= -\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right] = -y(x)$$

2. A $\sin x$ geometriai definíciójából következik, hogy

$$\sin x = -\sin(-x) \qquad [\text{L. } 8\ §]$$

Így $$y(-x) = \sin 2(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -y(x)$$

3. $y(-x) = \operatorname{tg}(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x = -y(x)$

A sin x ugyanis páratlan, a cos x páros függvény (l. 8. §)

4. $y(x) = \dfrac{10^x - 10^{-x}}{2} = \dfrac{-10^{-x} + 10^x}{2} = -\dfrac{10^{-x} - 10^x}{2} = -y(-x)$

5. $y(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -y(x)$

(l. hozzá pl. a 3. feladatot is!)

8. $y(-x) = (-x)\cdot|-x| = -x\cdot|x| = -y(x)$

2. § b) γ)

1. Az $x = \dfrac{1}{2}$ egyenes szimmetriavonal:

2. Igen, pl. az $x = \dfrac{3\pi}{4}$ egyenes szimmetriatengely, az $x = \dfrac{\pi}{4}$; $y = 0$ pont szimmetriacentrum.

3. A tengely egyenlete: $x = 3$.

4. Lásd a 100. ábrát!

2. § c)

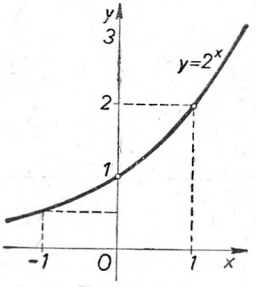
5. Kör, amelynek középpontja az $x_0 = 2$; $y_0 = 0$ pontban van, sugara 3 egységnyi.

6. Ugyancsak a négyzetgyök kétértékűsége miatt kétértékű függvény.

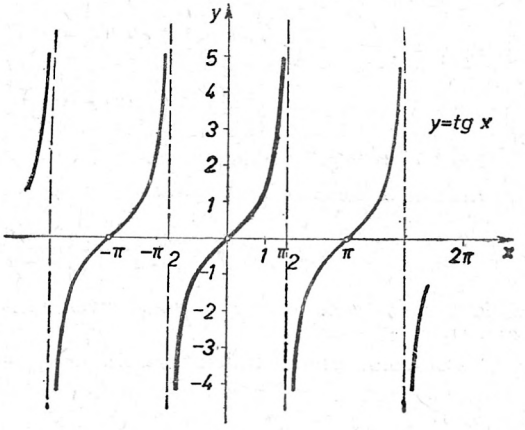
2. § d)

1. $p = \dfrac{2\pi}{3}$

2. $p = \pi$



100. ábra



101. ábra

3. $p = \dfrac{\pi}{3}$

4. $p = 2\pi$

5. $p = 2\pi$

6. $p = 2\pi$

7. $p_\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (Csak polárkoordinátás alakban jelentkezik periodicitás!)

2. § e)

2. Lásd a 101. ábrát!

6. és 7. Szakadási pontok:

$$x_k = k\pi (k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots)$$

Egyik helyen sem állítható helyre a folytonosság.

8. Szakadási pont: $x = 2$.

9. Szakadási pontok: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.

10. Szakadási pont: $x = -1$.

11. A függvény az $x \leqq 0$ helyen nincs értelmezve, így az $x = 0$ helyen szakadása van.

12. Szakadási helyek: $x_0 = 0$.

13. Szakadási helyek:

$$x_1 = \sqrt{2}; \qquad x_2 = -\sqrt{2}$$

14. Szakadási helyek:

$$x_n = (2n+1)\pi. \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots).$$

A folytonosság sehol nem állítható helyre.

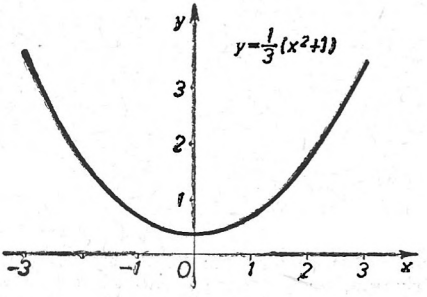
15. A függvénynek az $x = 0$ helyen szakadása van. (Lásd a 2. § e) 4. feladatot.)

3. § a)

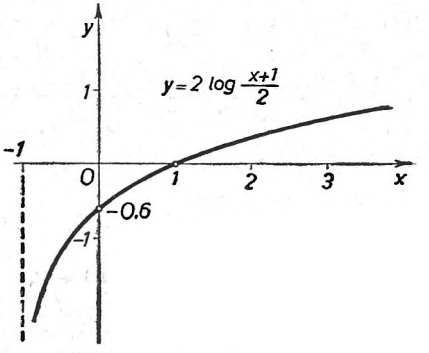
11. Az y tengely irányában 3-szoros zsugorítást ezt követően $\frac{1}{3}$ egységnyi eltolást kell végeznünk:

$$3\left(y - \frac{1}{3}\right) = x^2$$

Lásd a 102. ábrát!



102. ábra



103. ábra

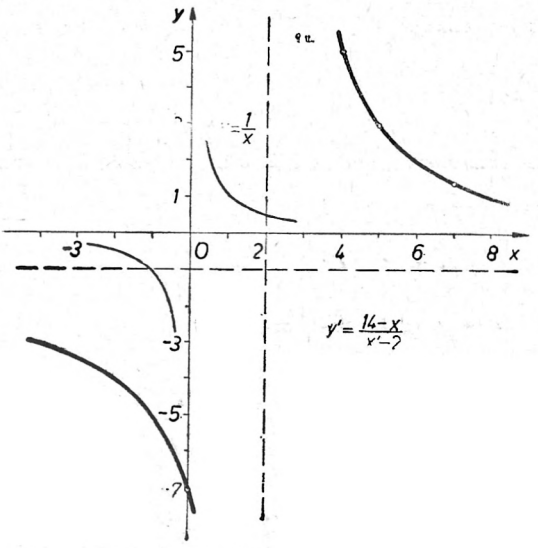
13. 103. ábra.

16. $12y = 2^{\frac{x}{2}}$. Azaz $p = \frac{1}{2}$ (x tengely irányában 2-szeres nyújtás); $p = 12$ (y tengely irányában 12-szeres zsugorítás).

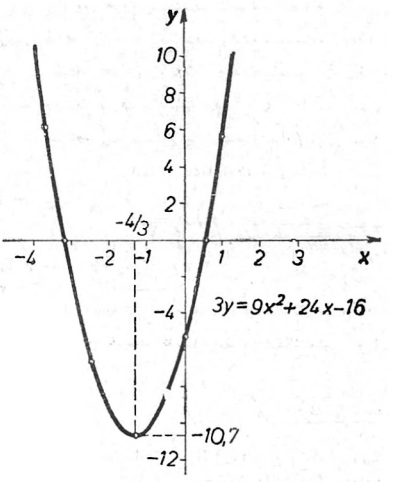
17. $\xi = 1$. (Tehát az x tengely pozitív irányában 1 egységnyi eltolás.)

18. Az új egyenlet: $y' = \frac{14 - x}{x^2 - 2}$

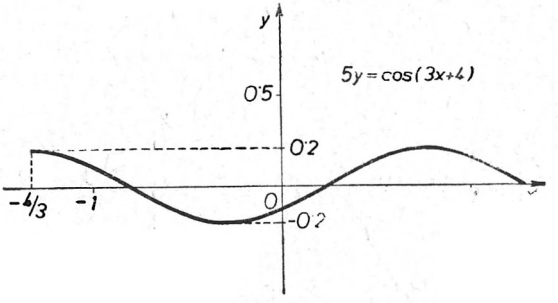
A görbe: 104. ábra!



104. ábra



105. ábra



106. ábra

19. Az egyenlet: $36(x'^2 + y'^2) - 36 = 0$, azaz: $x'^2 + y'^2 = 1$.

Jelentése: az eredetileg megadott egyenlet ellipszist ábrázolt. A transzformáció következtében az x tengely irányában háromszoros, az y tengely irányában kétszeres zsugorítást végeztünk, így egységsugarú kör lett belőle. Emellett (helyesebben ezután) az x tengely irányában $\frac{2}{3}$-dal, az y tengely irányában $\left(-\frac{1}{2}\right)$-del el is toltuk a kört, így középpontja az origóba került!

20. $3y + 32 = \left[3\left(x + \frac{4}{3}\right)\right]^2$, $\quad 3\left(y + \frac{32}{3}\right) = \left[3\left(x + \frac{4}{3}\right)\right]^2$

Így a görbe: 105. ábra!

21. L. a 106. ábrát!

22. Koordinátatranszformációnak – hiszen itt tulajdonképp alakzatról nincs is szó! – *mért hőmérsékletet Celsius-fokokban c-vel, Fahrenheit-fokokban f-fel; Réaumur-fokokban r-el jelölve:*

$$c = \frac{5}{4}r = \frac{1}{1{,}8}(f - 32)$$

$$r = \frac{4}{5}c = \frac{8}{18}(f - 32)$$

$$f = 1{,}8\left(c + \frac{32}{1{,}8}\right) = \frac{18}{8}\left(r + \frac{256}{18}\right)$$

23. *Az α szög mérőszámát radiánokban α-val, fokokban $A°$-kal jelölve,* a

$$\pi : 180° = \alpha : A°$$

aránypár segítségével a következő lineáris transzformációra jutunk:

$$\alpha = \pi \cdot \frac{A°}{180°};$$

$$A° = 180° \cdot \frac{\alpha}{\pi}$$

24. Az A test tömege fizikai egységekben : a g, technikai egységekben: $b \frac{\text{gsec}^2}{\text{cm}}$, ahol g a technikai grammsúly – azaz erő – rövidítése. a és b összefüggése:

Az A test a g súlyú a technikában (1 cm³ víz tömege ugyanis 1 g a fizikában, súlya 1 g a technikában. Ugyanazon test fizikai tömege és technikai súlya ugyanolyan mértékszámú ennek következtében). Márpedig Newton II. törvénye értelmében a (súly)-erő és a gyorsulás (981 cm/sec²) hányadosa adja a tömeget, igy

$$b = \frac{a}{981}$$

Fordítva pedig: $a = 981 \cdot b$.

3. § b) α)

1. A P pont képe az alakzattranszformáció folytán eredeti helyétől

$$\varrho \cong \sqrt{(1{,}8 - 0{,}918)^2 + (2{,}35 - 2{,}96)^2} \cong 1{,}072$$

egységnyi távolságra került.

Koordinátatranszformációt végezve, természetesen helyben marad a P pont, hiszen ekkor a $\varphi = 0{,}918$ értéke a polárszöget, az $r = 2{,}96$ pedig az origótól mért távolságot jelenti!

2. Az $y = 2x$ egyenes a $\varphi = \text{arc tg } 2 \cong 1{,}123$ egyenletű, a φ tengellyel párhuzamos egyenesbe megy át!

3. Az $r \cdot \sin\varphi = 2r \cdot \cos\varphi - 3$,

azaz az
$$r = \frac{3}{2\cos\varphi - \sin\varphi} = \frac{6}{\sqrt{17} \cdot \cos(\varphi + \alpha)}$$

egyenletű görbébe megy át, ahol $\alpha = \text{Arc tg}\frac{1}{4} \cong 0{,}244$. Ez pedig az $r = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$ egyenletű görbéből eltolással és zsugorítással származtatható.

4. A 2. és 3. feladat alapján belátható, hogy az $r = \sec\varphi$ egyenletű görbéből zsugorítással és eltolással származtatható görbék seregébe megy át.

5. *A*
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 \operatorname{Arc\,tg}\frac{y}{x} + C,$$
illetve a
$$\operatorname{tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-C}{2} = \frac{y}{x}$$
egyenletű görbék seregét viszi át a 2 iránytangensű egyenesek seregébe a transzformáció!

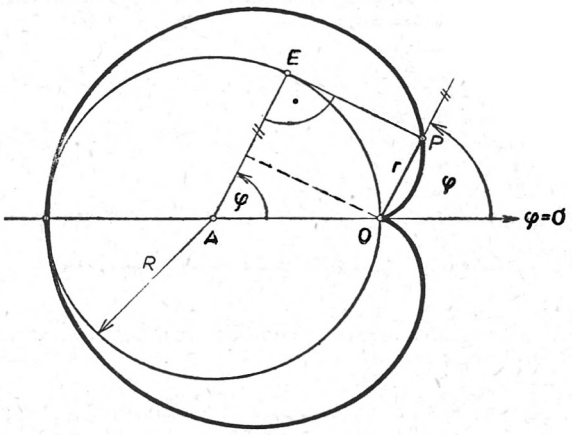
7. Az
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2-1}$$
egyenletű görbét viszi át a transzformáció a kérdéses hiperbolába.

3. § *b) β)*

4.
$$r = \frac{3}{\cos\varphi}$$

7. A sinustétel szerint:
$$R : r = \sin(\varphi-\alpha) : \sin[180^\circ - (\beta-\alpha)] =$$
$$= \sin(\varphi-\alpha) : \sin(\beta-\alpha)$$
Azaz:
$$r = R \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\varphi-\alpha)}.$$

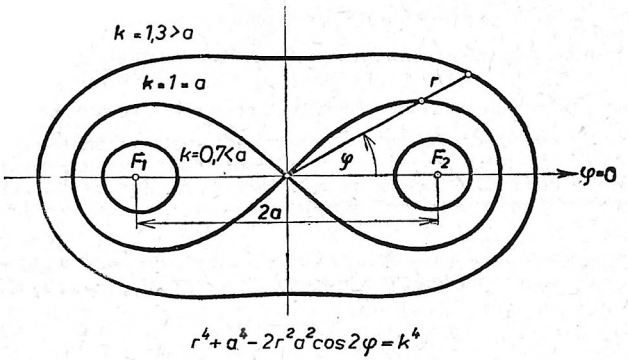
8. A kardiodid egyenlete:
$$r = R(1-\cos\varphi)$$
L. a 107. ábrát!)



107. ábra

10. Ha a két fókusz távolságát $2a$-val jelöljük, azaz $\overline{F_1F_2} = 2a$, akkor
$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$$
a lemniszkáta egyenlete. Itt felhasználtuk az $1-2\cos^2\varphi = \cos 2\varphi$ relációt (l. 8. §).

11. Az egyenlet:
$$r^4 + a^4 - 2r^2a^2\cos 2\varphi = k^4$$
(L. a 108. ábrát!)

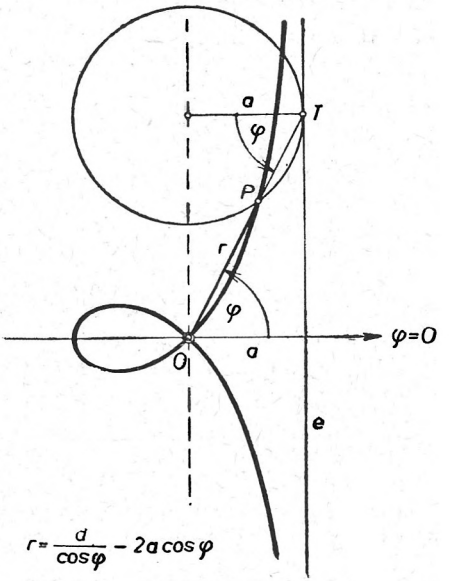


108. ábra

12. A polárkoordinátás egyenlet:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} - 2a \cdot \cos\varphi$$

(L. a 109. ábrát!)



109. ábra

4. §

2. Az inverz függvény:

$$y = \frac{1-x}{3}$$

3. Az inverz függvény:

$$y = \sqrt{x-1}$$

4.
$$y = 1 - \frac{1}{x}$$

6.
$$y = \sqrt{x^3 - 1}$$

7. $y = 2^{\frac{1}{x}}$. A függvénynek az $x = 0$ helyen szakadása van. Ez az eredeti függvényből is érthető!

(Ott persze a betűcsere következtében a 0 az y értékét jelenti.) Nyilván nem létezik olyan x alap, amelyet az $y = 0$ hatványra emelve 2-t kapnánk eredményül. Ezért nincs az inverz függvénynek sem helyettesítési, sem határértéke az $x = 0$ helyen!

8.
$$y = \frac{3-x}{x-2} = -1 + \frac{1}{x-2}$$

9.
$$y = x + \frac{1}{x}$$

10. $y = -\frac{x}{(x+1)^2}$ (Először a nevezőt gyöktelenítjük $1-\sqrt{1+4x}$-szel történő szorzással. Rendezés után négyzetre emelünk, így eltűnik minden gyökjel. Betűcsere után kifejezzük y-t!)

11. A függvény alakilag megegyezik inverzével, azaz a két változóban szimmetrikus.

12. A szögfelezőn levő pontok, azaz olyanok, amelyek a görbe egyenletén kívül az $y = x$ egyenletet is kielégítik (egyenletmegoldással tehát meghatározhatók). Ez algebrailag is könnyen belátható. A betűcsere következtében ugyanis bármely az egyenletet kielégítő számpár sorrendjét is fel kell cserélnünk – de ez felesleges, ha azok egymással egyenlőek.

13. Ezek az $y^2 - 2y \cdot y + 9y - 4y - 4 = 0$ egyenlet gyökei: $y_1 = 4$; $y_2 = 1$; tekintettel arra, hogy ezek az $y = x$ egyenletet is kielégítik, így $P_1(4; 4)$; $P_2(1; 1)$ a helyben maradó pontok.

5. § *a)*

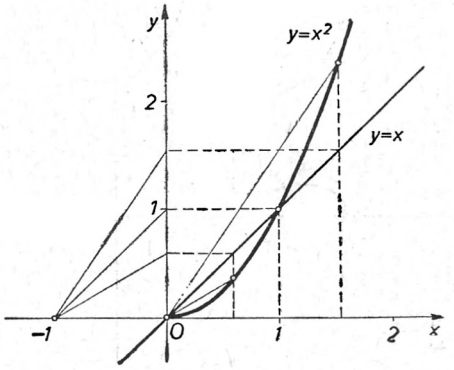
1. A két háromszög hasonlóságából a következő aránypárt kapjuk:

$\overline{AO} : \overline{OO'} = \overline{OB}\ \overline{BD}$; azaz $\overline{BD}$-t y-nal jelölve:

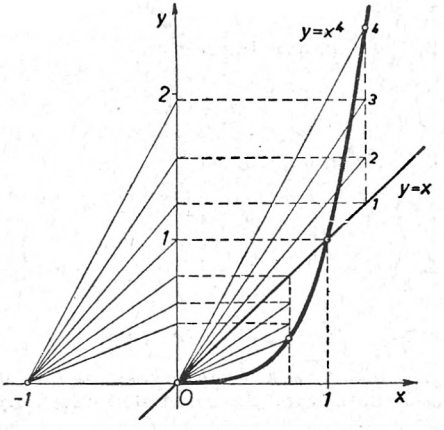
$1 : f(b) = b : y$; ebből $y = \frac{b \cdot f(b)}{1} = b \cdot f(b)$. Qu. e d.

2. L. a 110. ábrát!

3. L. a 111. ábrát!



110. ábra



111. ábra

5. § *b) α)*

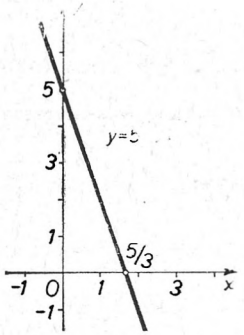
1. $-5 = 3 \cdot (-x)$. Az $y = -x$ egyenesből származtatható tehát, az x tengely irányában háromszoros zsugorítással, az y tengely pozitív irányában pedig 5 egységnyi eltolással. (L. *a* 112. ábrát!)

2. L. a 113. ábrát!

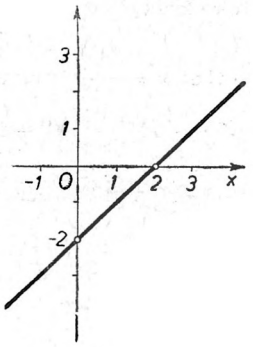
3. L. a 114. ábrát!

4. L. a 115. ábrát!

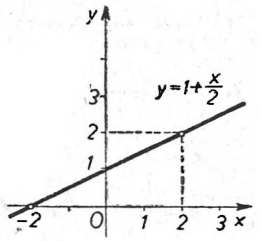
5. L. a 116. ábrát!



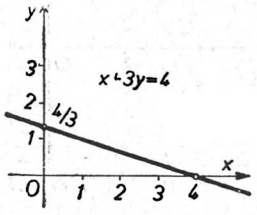
112. ábra



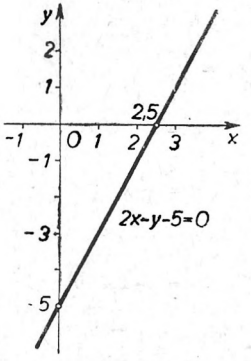
113. ábra



114. ábra



115. ábra



116. ábra

5. § b) β)

2. $y\,(0{,}37) = -\,0{,}1$ 3. $y\,(12{,}17) = 1{,}08532$
4. $y\,(9{,}463) = 0{,}97602$ 6. $x_0 \approx 3{,}0892$
7. $x_0 \approx 0{,}905$ 8. $x_0 \approx 4{,}9798 \approx 4{,}980$

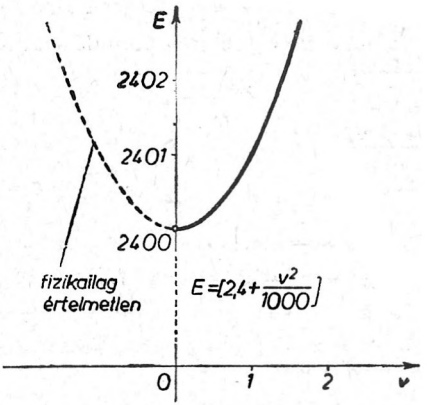
5. § c)

4. L. a 117. ábrát az előző oldalon!

5. A pályaegyenlet:

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{e\,E}{m}\left(\frac{x}{v}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad \frac{2my}{e\cdot E} = \left(\frac{x}{v}\right)^2$$

Az $y = x^2$ parabolát tehát az y tengely irányában E-szeresen nyújtanunk kell – ami annyit jelent, hogy növekvő E-vel a pályagörbe egyre gyorsabban simul rá az erővonalak irányára. Emellett a parabolát az x tengely irányában v-szeresen kell nyújtanunk – ami annyit jelent,



117. ábra

hogy növekvő sebességgel belőve az elektront, annak pályája egyre lassabban távolodik (görbül) el a belövési iránytól.

6. A max. helye: $\xi = \frac{1}{4}$; a max. értéke: $\eta = -\frac{7}{8}$; a zérushelyek: $x_{0,1}$ és $x_{0,2}$ nem valósak! A görbe az $y = -x^2$ parabolához képest az y tengely irányában $q = 2$-szeresen nyújtva van.

7. $\xi = -\frac{3}{2}$; $\eta = \frac{17}{4}$. Az $y = -x^2$ parabolához viszonyítva:

$q = 1$; $x_{0,1} = -1{,}5 + \sqrt{\frac{17}{4}}$; $x_{0,2} = -1{,}5 - \sqrt{\frac{17}{4}}$

8. $\xi = 0$; $\eta = 5$; $x_{0,1} = +\sqrt{5}$; $x_{0,2} = -\sqrt{5}$

9. $\xi = \frac{a}{4}$; $\eta = -\frac{7a^2}{8}$. Valós gyökhely nincsen!

10. $\xi = \frac{a^2}{2b^2}$; $\eta = \frac{a^4}{4b_2}$;

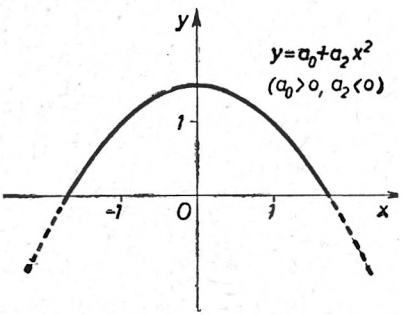
$x_{0,1} = 0$; $x_{0,2} = \frac{a^2}{b^2}$

12. $\xi = \frac{3}{8}$; $\eta = 0{,}31875$

13. $\xi = \frac{15}{4}$; $\eta = \frac{5}{8}$

14. $\xi = 0$: $\eta = -a^4$

15. $\xi = \frac{b}{2a}$; $\eta = -2{,}25b^2$



118. ábra

17. $x_{0,1} = -1{,}08$; $x_{0,2} = 2{,}08$

18. $x_{0,1} = 0{,}47$; $x_{0,2} = 4{,}05$

19. $x_1 = x_2 = 1{,}5$

20. A görbe és egyenes nem metszik egymást; valós gyökök nincsenek.

21. Az erő P a $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ sebességnél 0-vá válik. (Ha pedig megszűnik az erő, megszűnik a gyorsulás is, a sebesség állandó marad – épp a fent kiszámított értéknél.) (L. a 118 ábrát!)

5. § d)

2. $\xi = \frac{1}{2}$; $\eta = -\frac{7}{8}$

3. Az egyenlet: $y' = -x'^3 + 6x'^2 - 21x' - 11$

4. $y' = x'^3 + 9x'^2 + 11x' - 19$

6. $x = x' - 1$; $y = y'$; (azaz: $\xi = 1$; $\eta = 0$). A transzformált egyenlet: $x'^3 + 3x' = y'$.

7. $x = x' + 1$; $y = y' - 14$; (azaz: $\xi = -1$; $\eta = 14$). A transzformált egyenlet: $y' = 2x'^3 - 24x'$

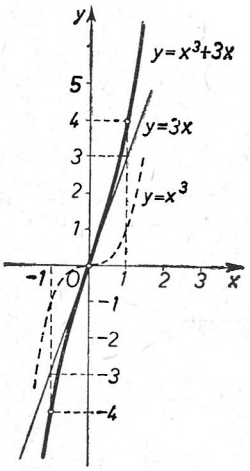
8. $\xi = -\frac{1}{3}$; $\eta = -7\frac{7}{17}$

10. L. a 119. ábrát!

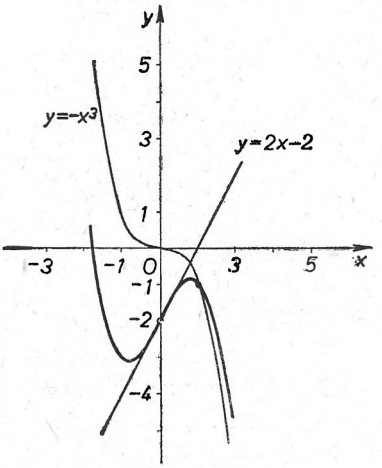
11. L. a 120. ábrát!

12. L. a 121. ábrát!

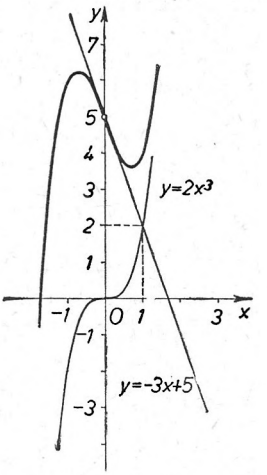
13. L. a 122. ábrát!



119. ábra



120. ábra



121. ébra

15. $x_1 = 4; \quad x_2 = x_3 = 1$

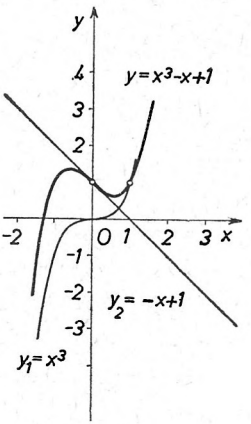
16. $x_1 = 5; \quad x_2 = x_3 = -1$

17. $x_1 = -1$. Több (valós) gyök (metszéspont) nincsen.

$$y = 2x^3 - 3x + 5$$

19. Az $x \cong -2$ helyen, $y_{max} \cong 28$ értékű maximumot, az $x \cong 2$; $y_{min} \cong -4$ értékű minimumot találjuk.

20. Maximumot az $x \cong 1$ helyen találunk ($y_{max} \cong 2$), minimumot az $x \cong -1$ helyen! ($y_{min} \cong -2$).



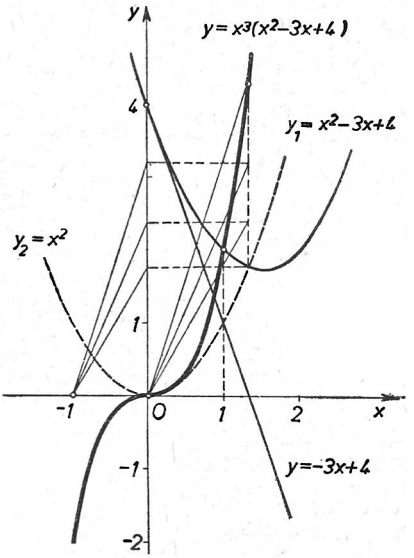
122. ábra

5. § e)

L. a 123. ábrát!

3. Útbaigazítás: Végezzünk a keresett $y = f(x)$ függvényen egy $y = y' + 1$ alakú lineáris transzformációt. Így az új, transzformált függvénynek az x_1, x_2, x_3, x_4 helyeken 0 helye lesz. Ebből már könnyen felírható a keresett legalacsonyabb fokú polinom egyenlete:

$$= \frac{13x^2 - x^4}{36}$$

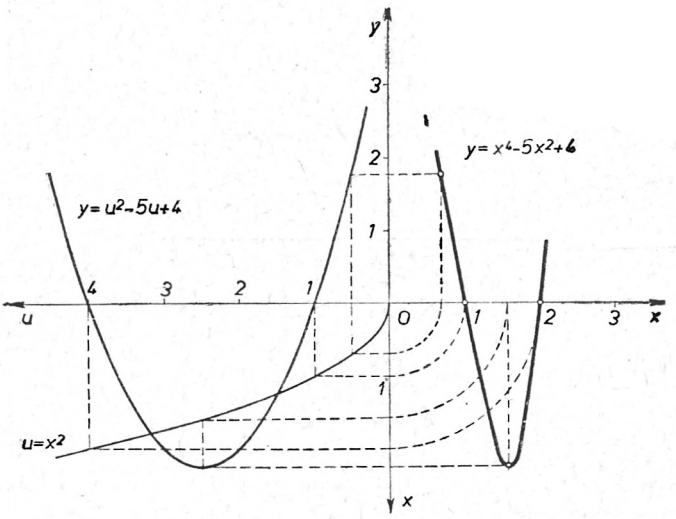


123. ábra

4. $y = (x^2)^2 - 5(x^2) + 4 = z^2 - 5z + 4;$

$z = x_2$

(L. a 124. ábrát!)



124. ábra

6. § a) α)

2. $\dfrac{2x^2 - 3x}{(x-3)(x^2+x+1)} \equiv \dfrac{9}{13} \cdot \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{13} \cdot \dfrac{17x+3}{x^2+x+1}$

3. $\dfrac{4x^4 - 2x + 1}{(x-1)^2 \cdot (x^2+2x+2)^2} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{2x+1}{x^2+2x+2} - \dfrac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2}.$

4. $y = x^2 - x - 1 + \dfrac{3}{x^2+x+2} - \dfrac{1}{x-3}$

5. $y = \dfrac{3}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-5}{x^2+3x+3}$

6. $y = 3 + \dfrac{2x-1}{x^2+x+1} - \dfrac{3}{x^2+4x+5}$

7. $y = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{x+3}{x^2+x+3} + \dfrac{1-9x}{(x^2+x+3)^2}$

8. $y = \dfrac{2}{(1-x)^4} - \dfrac{3}{(1-x)^3} + \dfrac{5}{1-x} + \dfrac{15}{2+3x}$

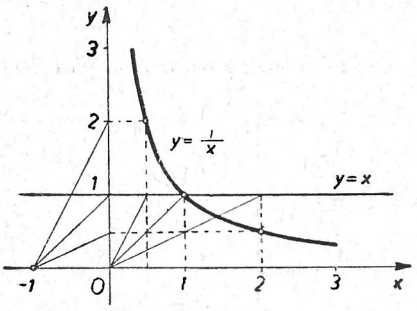
6. § a) β)

2. L. a 125. ábrát!

6. L. a 126. ábrát!

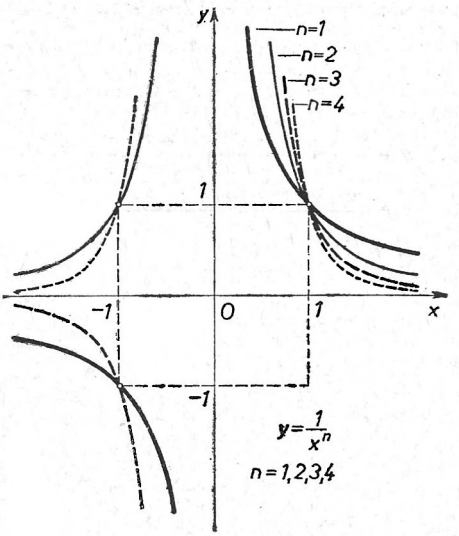
9. Átalakítva:

$$\frac{y-5}{3} = \frac{1}{(x+2)^3}$$



125. ábra

A függvény az $y = \frac{1}{x^3}$ parabolából az y tengely irányában történő háromszoros nyújtással, ezt követően $+5$ egységnyi eltolással, az x tengely irányában (-2) egységgel való eltolással származtatható. Az eredetileg $x = 0$-nál levő páratlanrendű pólus (3 rendű) így az $x = -2$ helyre kerül.



126. ábra

6. § b) α)

3. Az y-tengely irányában $\frac{29}{5}$-szörös nyújtást, majd $\frac{2}{5}$ egységnyi eltolást kell végeznünk, az x tengelyen tükröznünk, ezt követően ötszörös zsugorítást, majd $\left(-\frac{7}{5}\right)$ egységnyi eltolást kell végeznünk.

A vizszintes aszimptota egyenlete: $y \equiv \frac{2}{5}$, a függőlegesé: $x \equiv -\frac{7}{5}$

$= 1$; $\xi = 2$. Az aszimptoták egyenlete: $y = 1$; illetve $x = 2$.

5. $q = 6$; $\eta = -2$; $\xi = 3$; $p = -1$ (azaz tükröznünk kell az x tengelyen). Az aszimptoták egyenlete: $y \equiv -2$; illetve $x \equiv 3$.

6. A görbe az $y = \frac{2}{3}$ egyenessé «fajul». Az $x = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$ helyen megszüntethető szingularitása van a törtfüggvénynek.

6. § c)

5. Az aszimptoták egyenlete: $y \equiv 2$; $x \equiv 4$; $x \equiv -3$. Az $x_1 = 4$ és az $x^2 = -3$ hely (páratlan rendű) pólushelyek. Zérushelyek: $x_{0,1} = 3$; $x_{0,2} = 2$.

6. Aszimptoták egyenlete: az $y = x$ egyenes; az $x \equiv -3$ egyenes. Pólus az $x = -3$ helyen, megszüntethető szingularitás az $x = -2$ helyen van. Így a számláló (és a nevező is) $(x+2)$-vel osztható, a tört zérushelyei megállapíthatóak: $x_{0,1} = 2$ és $x_{0,2} = 3$ a zérushelyek. A megszüntethető szingularitás helyén a tört határértéke: 20. (Egyszerűsítés $(x+2)$-vel; utána helyettesítési értéket számolunk egyszerűen az $x = -2$ helyen.)

7. Aszimptoták: $y \equiv 1$: $x \equiv -3$ egyenesek. Megszüntethető szingularitás az $x = 1$ helyen, a határérték itt: $-\frac{1}{4}$. Pólus (páratlan rendű) az $x = -3$ helyen. A tört egyetlen 0 helye: $x_0 = 2$.

8. Aszimptoták: $y \equiv 12$; $x \equiv -2$; $x \equiv 1$ egyenesek. Pólushelyek: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; zérushelyek: $x_{0.3} = \frac{2}{3}$; $x_{0.4} = -3$; $x_{0.5} = \frac{3}{4}$.

9. Aszimptoták: $y = x^2$ parabola; $x = 0$ egyenes. Pólus az $x_1 = 0$ helyen van. Zérushely: $x_{0.2} = 1$.

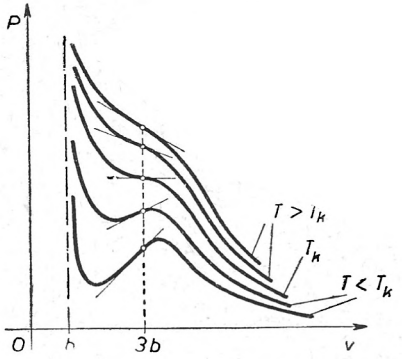
11. $y = \frac{C}{3} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 10x^2 + 33x - 36}$

12. $y = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

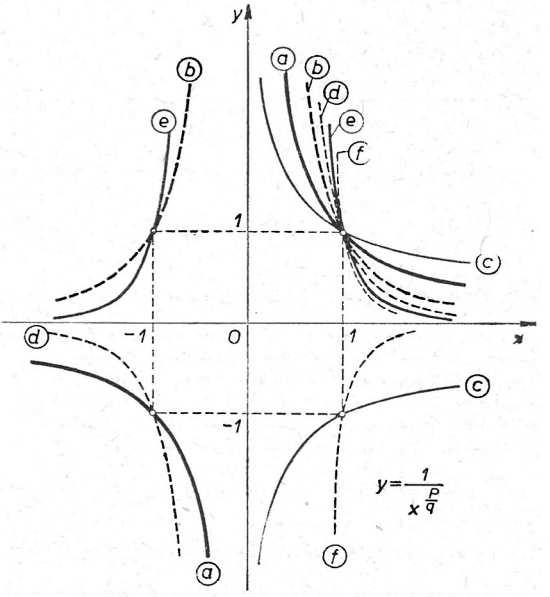
13. L. a 127. ábrát!

7. §.

2. L. a 128. ábrát!



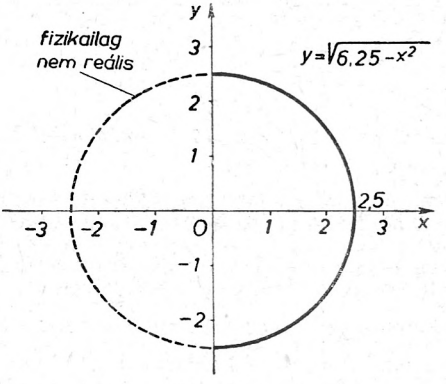
127. ábra



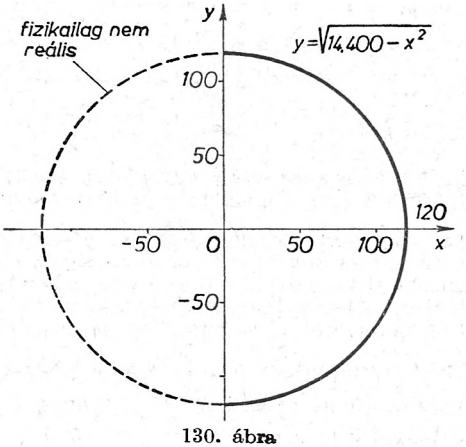
128. ábra

3. Az x_i tengely negatív ága fölé nyílnak. Jellegük egyezik – ettől eltekintve – a 7. § 2. feladatban ábrázolt függvényekével. Azokból tükrözéssel és nyújtással, valamint eltolással származnak.

4. L. a 129. ábrát!



129. ábra



130. ábra

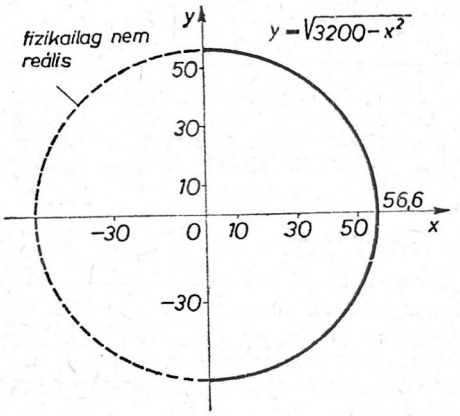
6. Jelöljük az egyik (a rövidebb) távot x-szel, a másikat y-nal. $y = \sqrt{14{,}400 - x^2}$. (L. a 130. ábrát!)

7. A testátló hossza: d; a magasság m; $d = \sqrt{3{,}200 - m^2}$. (L. a 131. ábrát!)

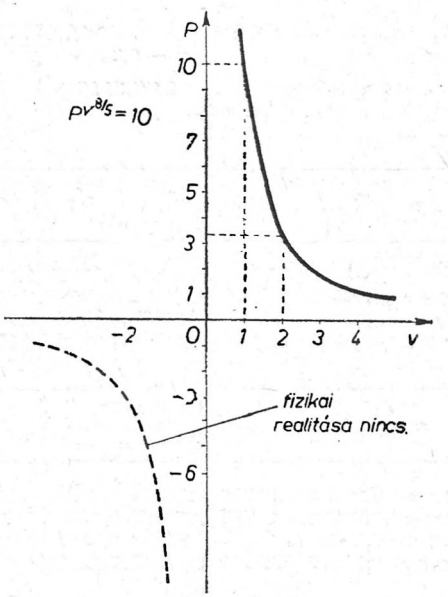
8. L. a 132. ábrát!

10. L. a 133. ábrát!

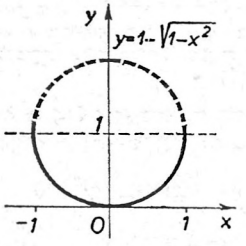
11. L. a 134. ábrát!



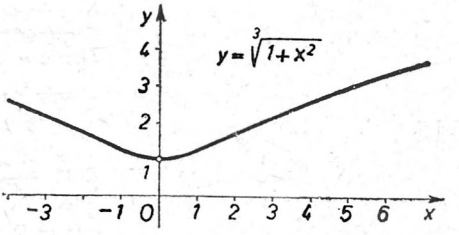
131. ábra



132. ábra



133. ábra



134. ábra

II. RÉSZ

8. § a) α)

2. $\sin 198^\circ \cong -0{,}3093$

3. $\sin 237^\circ \cong -0{,}8382$

4. $\sin 320^\circ \cong -0{,}643$

6. $\sin x \Big|_{x = -3{,}6} \cong -0{,}439$

7. $\sin x \Big|_{x = 4{,}21} \cong -0{,}8768$

8. $\sin x \Big|_{x = -0.3} \cong -0{,}296$

9. $\cos x \Big|_{x = 1.8} \cong -0{,}228$

10. $\operatorname{tg} 278{,}4^\circ \cong -6{,}76$

11. $\operatorname{ctg} 137°27' \cong -0{,}916$

12. $\sin 2{,}3 - \cos 155° \cong 1{,}0886$

13. $\cos 346° - \sin 4{,}2 \cong 1{,}8418$

14. $\operatorname{tg} 4{,}32 - \cos 1{,}95 \cong 2{,}7865$

15. $\operatorname{ctg} 224°35' - \sin 4{,}05 \cong 1{,}7741$

16. $\operatorname{tg} \cos x \Big|_{x\,=\,37°10'} \cong 1{,}025$

17. $\cos (27° + \sin 0{,}8\,x \Big|_{x\,=\,0{,}8} \cong 0{,}877$

19. $\cos (x^2 - \sin x \Big|_{x\,=\,1{,}2} \cong 0{,}8734$

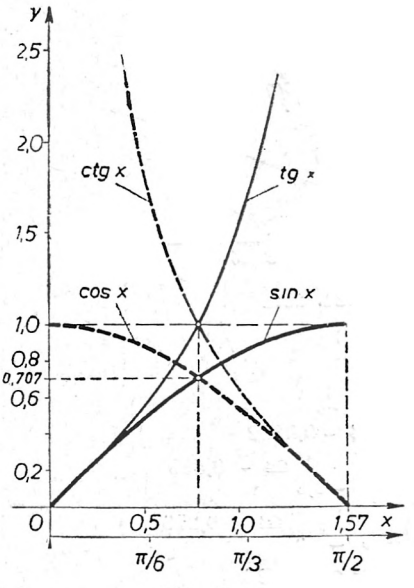
20. $\operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg} x \Big|_{x\,=\,0{,}2} \cong 0{,}2116$

22. $\operatorname{tg} \sin \operatorname{tg} \cos (2x - 27°) \Big|_{x\,=\,0{,}4} \cong 1{,}5018$

23.

x	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1,0
$\sin x$	0 01	0,02	0,04998	0,09983	0,19867	0,38942	0,47943	0,56464	0,71736	0,84147
$\cos x$	0,99995	0,9998	0,99875	0,995	0,98007	0,92106	0,87758	0,82534	0,69671	0,54030
$\operatorname{tg} x$	0,01	0,02	0,05004	0,10033	0,20271	0,42279	0,54630	0,68414	1,02964	1,5574
$\operatorname{ctg} x$	~ 100,0	~ 50,0	19,984	9,9671	4,93316	2,36524	1,8305	1,4617	0,971213	0,64209

x	1,2	1,3	1,4	1,45	1,5	1,52	1,54	1,56	1,57	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0,93204	0,96356	0,98545	0,99271	0,99749	0,99871	0,99953	0,99994	1,000	1,0000
$\cos x$	0,36236	0,26750	0,16997	0,1205	0,07074	0,05077	0,03079	0,0108	0,0008	0,0000
$\operatorname{tg} x$	2,5722	3,6021	5,7979	8,2381	14,101	19,670	32,461	92,62	1255,77	–
$\operatorname{ctg} x$	0,38877	0,27762	0,17248	0,12138	0,07092	0,05083	0,03081	0,0108	$7{,}9951\cdot10^{-4}$	0,0000



135. ábra

L. a 135. ábrát!

24. Az $y = \sin x$ függvény 2π, az $y = \cos x$ ugyancsak 2π, az $y = \operatorname{tg} x$ és az $y = \operatorname{ctg} x$ függvények pedig π periódusúak. Így: (l. a 136. ábrát a túloldalon!)

$$\sin (x + 2\pi) \equiv \sin x;\quad \cos (x + 2\pi) \equiv \cos x;$$
$$\operatorname{tg} (x + \pi) \equiv \operatorname{tg} x;\quad \operatorname{ctg} (x + \pi) \equiv \operatorname{ctg} x.$$

26. $\dfrac{y-1}{0{,}6} = -\cos\left[\dfrac{1}{3}(x-12)\right]$

27. $y + 2 = \sin 2(x - 1{,}5)$

28. $\dfrac{y}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{2}{3}(x - 1{,}2)$

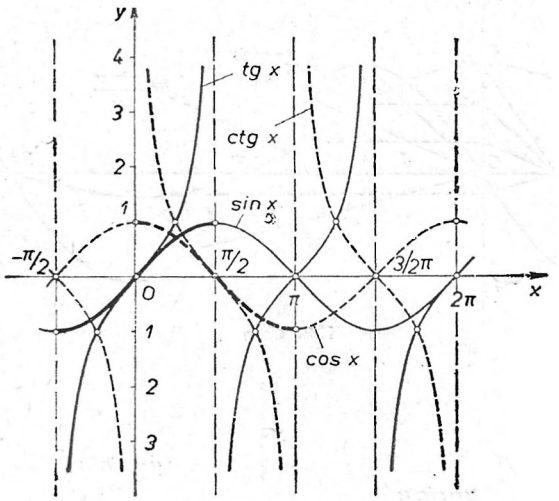
29. $\dfrac{y-1}{2} = \operatorname{ctg} 3(x - 0{,}233)$

30. L. a 137. ábrát a túloldalon!

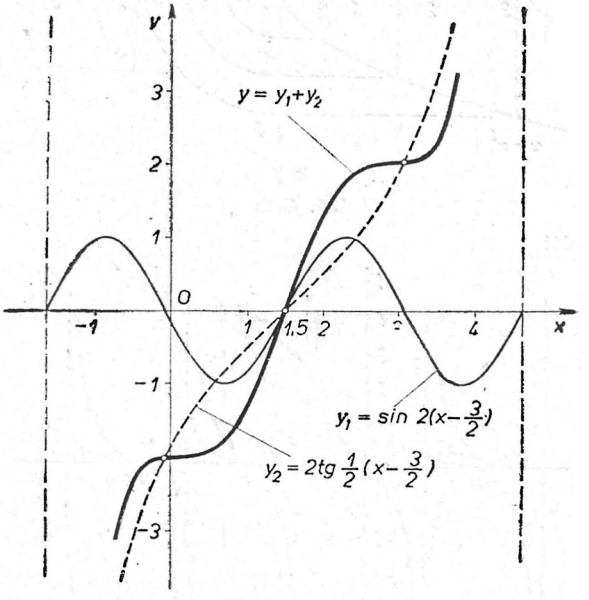
31. $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{3}(x-3) - \cos 1{,}5\left(x + \dfrac{4}{3}\right)$

32. $y = 2\operatorname{tg} 2(x+1) - \cos\dfrac{1}{3}(x+3)$

33. $y - 2 = 2\operatorname{ctg} 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right) - 5 \cdot \sin\dfrac{1}{2}(x+4)$

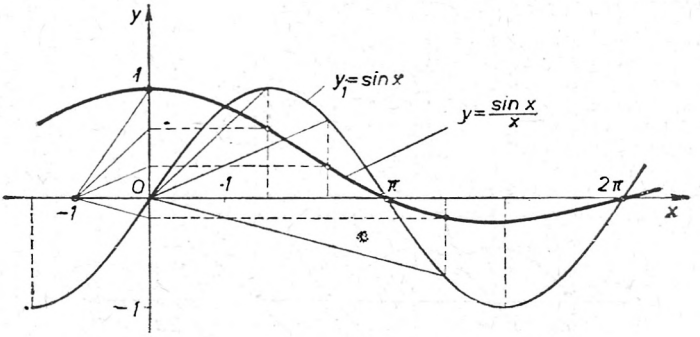


136. ábra



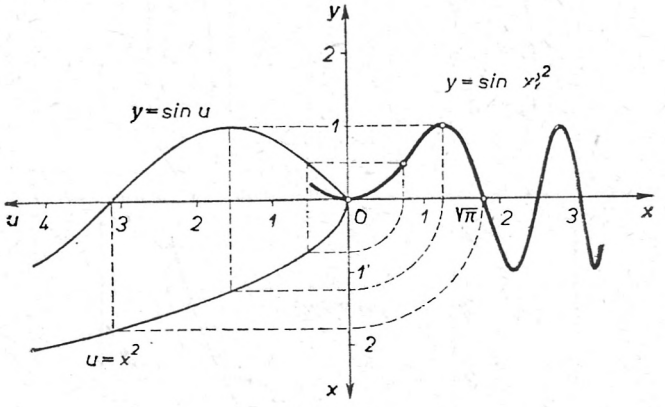
137. ábra

35. L. a 138. ábrát!



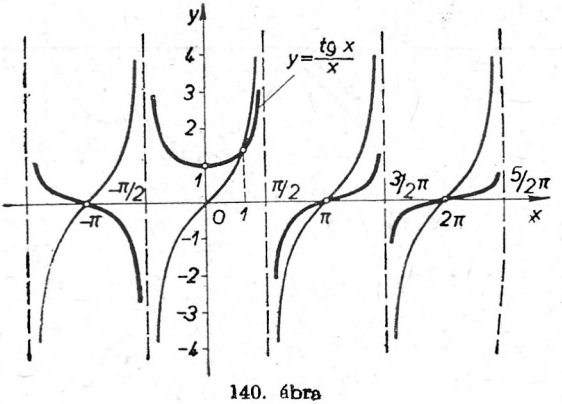
138. ábra

36. L. a 139. ábrát!



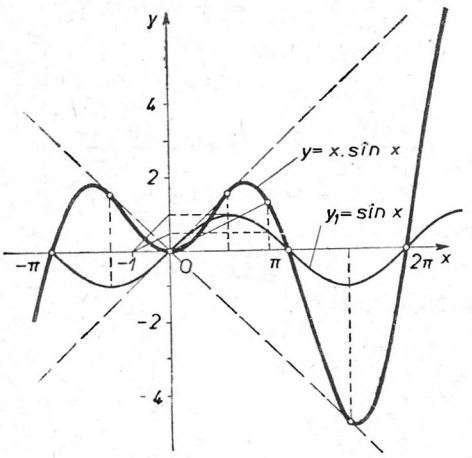
139. ábra

37. L. a 140. ábrát!

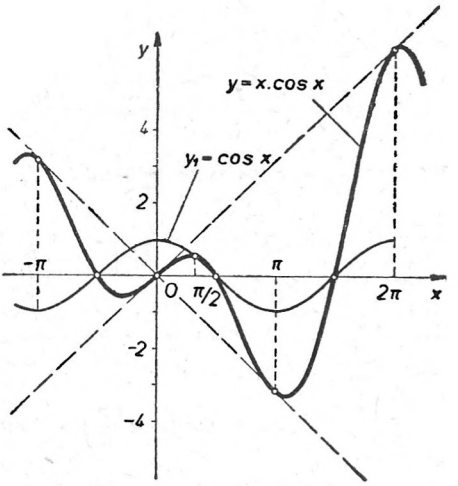


140. ábra

38. L. a 141. és 142. ábrát!



141. ábra



142. ábra

8. § *a) β)*

10. $v = \varphi(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ **11.** $w = \psi(y) = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

12. $u = \sin x = \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ **13.** $y = \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

14. $v = \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{z}$ **15.** $y = \sin x = \sqrt{1-w^2}$

16. $u = \varphi(w) = \dfrac{\sqrt{1-w^2}}{w}$ **17.** $v = \psi(w) = \dfrac{w}{\sqrt{1-w^2}}$

18. $y \equiv 1$ **19.** $w \equiv 1$

24. *a)* $\cos x = \sqrt{0{,}75} = \pm\, 0{,}866\ldots$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{0{,}75}} = \pm\, 0{,}576\ldots$; $\operatorname{ctg} x = \pm 1{,}735\ldots$

b) $\cos x \cong \pm\, 0{,}9474$; $\operatorname{tg} x \cong \pm \dfrac{0{,}32}{0{,}9474} \cong \pm\, 0{,}338$; $\operatorname{ctg} x \cong \pm\, 2{,}959$

25. *a)* $\sin x = \sqrt{0{,}36} = \pm\, 0{,}6$: $\operatorname{tg} x \cong \pm\, 0{,}75$; $\operatorname{ctg} x = \pm 1{,}333$

b) $\sin x \cong \pm$ 08928; $\operatorname{tg} x \cong \pm\, 4{,}018$; $\operatorname{ctg} x \cong \pm\, 0{,}249$

c) $\sin x = 0$; $\operatorname{ctg} x$ nincs értelmezve; $\operatorname{tg} x = 0$

26. *a)* $\sin u \cong \pm\, 0{,}3736$; $\cos u \cong \pm\, 0{,}928$; $\operatorname{ctg} u \cong 2{,}5$

b) $\sin u \cong \pm\, 0{,}9529$; $\cos u \cong \pm\, 0{,}303$; $\operatorname{ctg} u \cong -0{,}3182$

27. *a)* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = 2{,}5$; $\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin u \cong \mp 0{,}3726$

$\sin(u - \pi) = -\sin(\pi - u) \cong \mp 0{,}3726$;

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \cong -0{,}3182$; $\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) \cong \pm 0{,}9529$

$\sin(u - \pi) \cong \pm 0{,}9529$;

28. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x = -0{,}82$; $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cos\left(\pi + x - \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= -\sin x \cong \mp 0{,}5723$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x \cong \mp 1{,}431$$

29. $$\sin x + \operatorname{ctg}(\pi - x) \cong \pm 0{,}5723 \pm 1{,}431 \cong \begin{cases} \pm 2{,}0033 \\ \pm 0{,}8587 \end{cases}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cong \begin{cases} 3{,}0323 \\ 1{,}8877 \end{cases}$$

30. $$\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)} + \cos v = \operatorname{tg} v + \cos v \cong 0{,}0803 \pm 0{,}9968 \cong \begin{cases} \pm 1{,}0771 \\ \pm 0{,}9165 \end{cases}$$

$$\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg} v = \cos v - \operatorname{ctg} v \cong \pm 0{,}9968 \pm 124{,}6 \cong \begin{cases} \pm 125{,}6 \\ \pm 123{,}6 \end{cases}$$

$$\cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + v\right) = \sin v + \operatorname{ctg} v = -0{,}08 \pm 124{,}6 \cong \begin{cases} 124{,}52 \\ -124{,}68 \end{cases}$$

31. $y = \sin 3x = -4u^3 + 3u$

32. $v = \cos 2x \cdot \sin x = u - 2u^3$

33. $w = \operatorname{tg} 2x = \frac{2u\sqrt{1-u^2}}{1-2u^2}$

34. $z = \cos 3x = (1 - 4u^2)\sqrt{1-u^2}$

35. $y = \sin 3x = [4v^2 - 1] \cdot \sqrt{1-v^2}$

36. $w = \sin 2x = 2v\sqrt{1-v^2}$.

37. $u = \cos 3x = 4v^3 - 3v$

38. $z = \operatorname{tg} x \cdot \sin x = \frac{1-v^2}{v}$

39. $$\sin(x+\beta) = \sin x \cdot \cos\beta + \cos x \cdot \sin\beta \cong -0{,}2232 \pm 0{,}6597 = \begin{cases} +0{,}4365 \\ -0{,}8829 \end{cases}$$

40. $$\cos(x+\beta) \cong \pm 0{,}2152 \pm 0{,}6842 = \begin{cases} \pm 0{,}8994 \\ \pm 0{,}469 \end{cases}$$

41. $$\sin(x-\beta) \cong \begin{cases} 0{,}4365 \\ -0{,}8829 \end{cases}$$

42. $$\cos(2x-\beta) \cong -0{,}1493 \pm 0{,}9503 = 0{,}801;$$

a másik lehetséges eredmény irreális, mert nincs olyan szög, amelynek cosinusa -1-nél kisebb lenne!

43. $$\operatorname{tg}(x+2\beta) \cong \frac{-0{,}5923 \pm 0{,}409}{\pm 0{,}5618 \pm 0{,}4246} \cong \begin{cases} \mp 1{,}0149 \\ \mp 0{,}1858 \\ \mp 7{,}301 \\ \mp 1{,}347 \end{cases}$$

44. $$\operatorname{ctg}(x-\beta) \cong \begin{cases} \pm 2{,}063 \\ \pm 1{,}075 \\ \mp 1{,}019 \\ \pm 0{,}531 \end{cases}$$

45. $$v = \sin\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}}; \qquad w = \cos\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-y^2}}{2}};$$

$$z = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{1 \mp \sqrt{1-y^2}}}$$

46. $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta) \cong \begin{cases} 1{,}322 \\ 0{,}2112 \end{cases}$

47. $\cos(\alpha+2\beta) \cong \begin{cases} \pm 0{,}2104 \\ \pm 0{,}936 \end{cases}$

48. $\sin(2\alpha-2\beta) \cong \begin{cases} -0{,}286 \\ -0{,}988 \end{cases}$

49. $\cos(\alpha-\beta) \cong \begin{cases} \pm 0{,}6586 \\ \pm 0{,}9834 \end{cases}$

50. $\sin(2\alpha+\beta) \cong \begin{cases} 0{,}2064 \\ -0{,}798 \end{cases}$

51. $\operatorname{tg}(\alpha-2\beta) \cong \begin{cases} -4{,}65 \\ 0{,}2455 \end{cases}$

52. $z = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-y^2}}{2}}$; illetve $y = 2z\sqrt{1-z^2}$

Utóbbi alak természetesen lényegesen leegyszerűsíti a szerkesztést — a változók közül pedig elvileg bármelyik tekinthető függő változónak!

53. $y = 4z\sqrt{1-z^2} - 8z^3\sqrt{1-z^2}$

54. $z = 2y\sqrt{1-y^2}$

55. $z = -4u^3 + 3u$

56. $z = 1 - 2u^2$; illetve $u = \sqrt{\frac{1-z}{2}}$

57. $z = \sqrt{1-u_2}$; illetve $u = \sqrt{1-z^2}$

58. $z = \sqrt{1-u^2} - 4u^2\sqrt{1-u^2}$

59. $z = 1 - 8u^2 + 8u^4$

60. $z = \frac{2u \cdot \sqrt{1-u^2}}{1 \quad 2x}$

61. $z = \dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

63. $y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+2) + \cos 5\left(x - \dfrac{4}{5}\right)\right]$

64. $y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x-7) - \cos 5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)\right]$

65. $y = \dfrac{1}{2}\left[\sin 5(x-1) + \sin(x+1)\right]$

66. $y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+9) - \cos 3\left(x - \dfrac{5}{3}\right)\right]$

69. $v_a = \dfrac{159}{2} = 79{,}5$

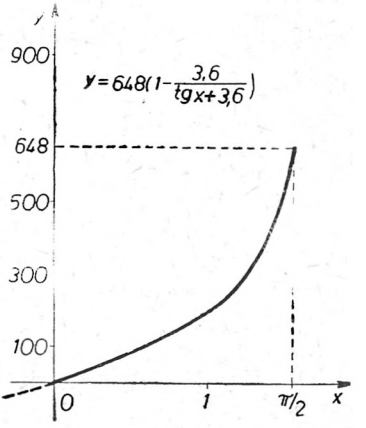
$v_i = \dfrac{153}{2} = 76{,}5$

70. $v_a = 240$; $v_i = 60$

72. ln (cos 0,72 + cos 1,17) ≅ 0,1063

73. ln (cos 37°42′ + sin 176°04′30″) ≅ −0,1443

74. ln (sin 2,72 − cos 1,34) ≅ −1,6937



143. ábra

8. § *a) γ)*

1. $y \cong \dfrac{648 \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 3{,}6} = 648\left[1 - \dfrac{3{,}6}{\operatorname{tg} x + 3{,}6}\right]$ (l. a 143. ábrát!)

2. $y = 1200 \cdot \operatorname{tg} x$

3. $m = 4 \cdot \dfrac{\sin 86°40'}{\sin 10°} \cdot \operatorname{tg} x \cong 22{,}952 \cdot \operatorname{tg} x$ (km)

5. $y = 1856(\sin x + \cos x) = \sqrt{2} \cdot 1856 \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (méter)

6. $y = \sqrt{25{,}120 + 8736 \cdot \cos x}$ $\left(\dfrac{\text{m}}{\text{mp}}\right)$

7. $y = \sqrt{574{,}821 + 273{,}420 \cos x}$ (kg)

8 § *a) δ)*

8 § *b) α)*

2. Arc tg 1,3—cos 0,5 ≅ 0,0376

3. arc cos 0,7 + arc tg 0,5 ≅ 1,2589 ± $k\pi$, illetve −0,332 ± $k\pi$

Arc sin (−0,95)—tg 0,37 ≅ −1,6411

Arc sin 0,3 + arc sin 0,3 ≅ 0,6094 ± $2k\pi$; illetve: $\pi \pm 2k\pi$

$y'(0{,}4) = \operatorname{tg} x + \text{Arc tg } x - \text{arc cos } x\Big|_{x=0.4} \cong -0{,}3560 \pm 2k\pi$

illetve: 1,9626 ± $2k\pi$

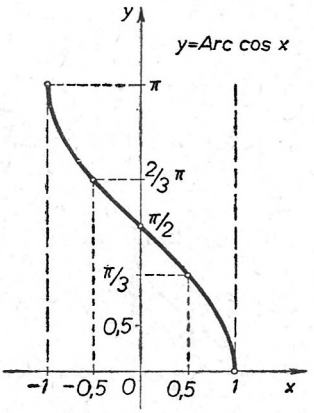
7. $\text{Arc sin } 0{,}7 - \text{arc cos } 0{,}32 + \text{Arc tg } 0{,}88 = 0{,}2522 \pm 2k\pi$
illetve: $2{,}7422 \pm 2n\pi$

8. $\text{arc sin } (-0{,}92) + \text{Arc cos } 0{,}3 - \text{Arc tg } 0{,}25 \cong -0{,}147 \pm 2n\pi$
illetve: $0{,}9526 \pm 2k\pi$

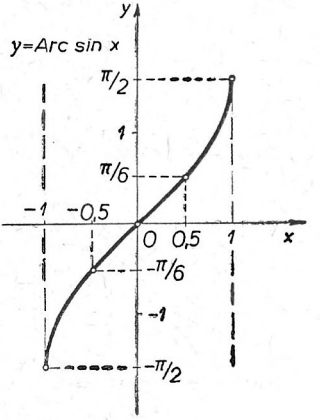
9. $\text{Arc tg } 0{,}8 + \text{arc tg } 0{,}42 = 1{,}0725 \pm k\pi$

8. § b) β)

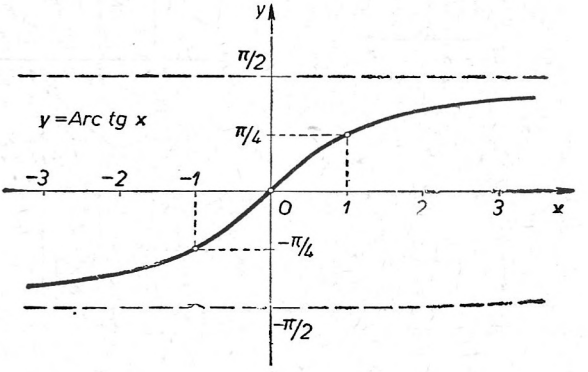
1. L. a 144. ábrát!
2. L. a 145. ábrát!
3. L. a 146. ábrát!



144. ábra

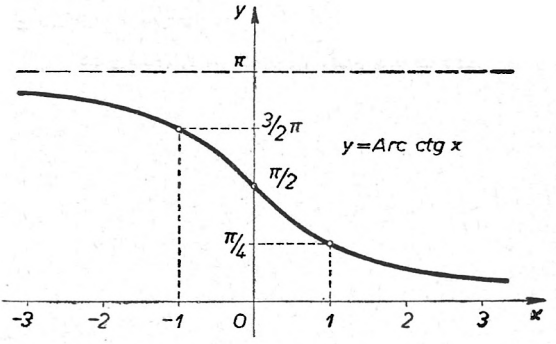


145. ábra



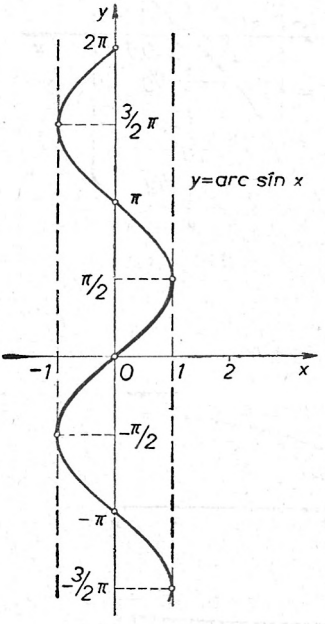
146. ábra

4. L. a 147. ábrát!



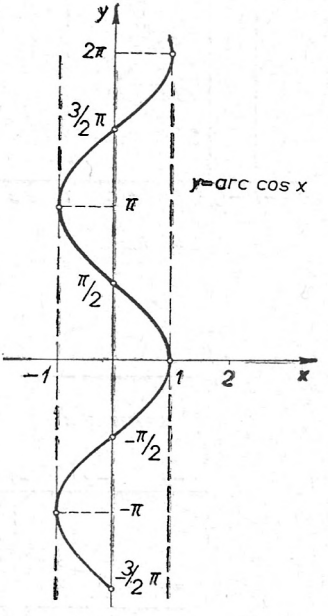
147. ábra

5. L. a 148. ábrát!



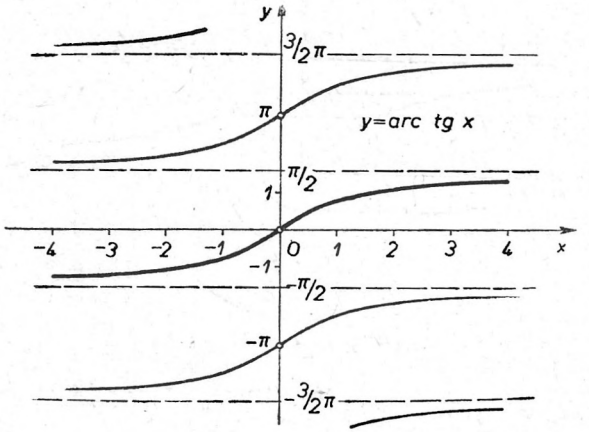
148. ábra

6. L. a 149. ábrát!



149. ábra

7. L. a 150. ábrát!

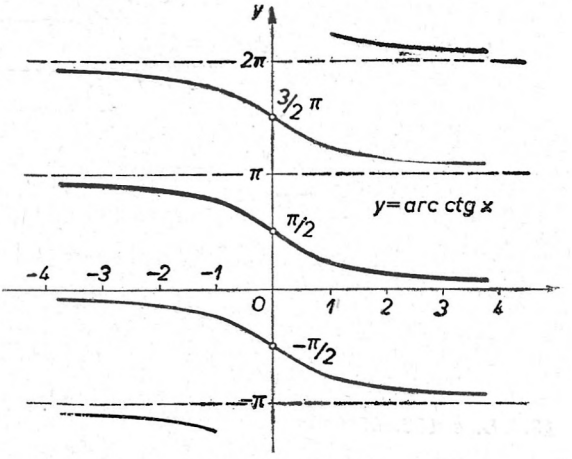


150. ábra

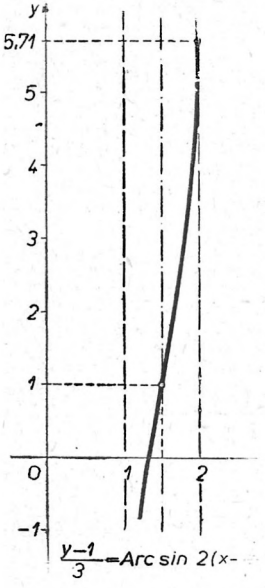
8. L. a 151. ábrát!

9. L. a 152. ábrát!

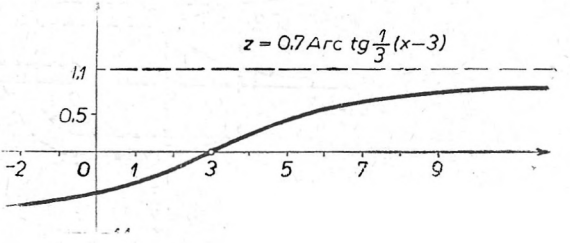
10. L. a 153. ábrát!



151. ábra

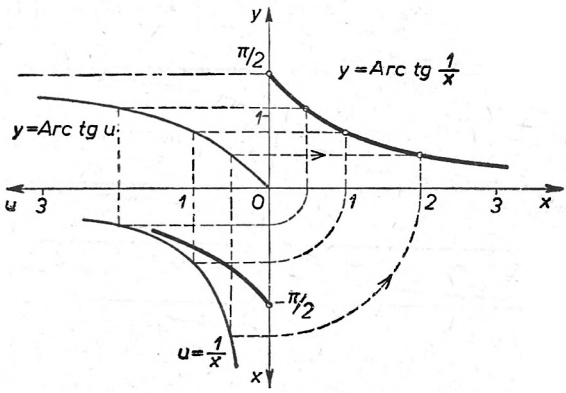


152. ábra



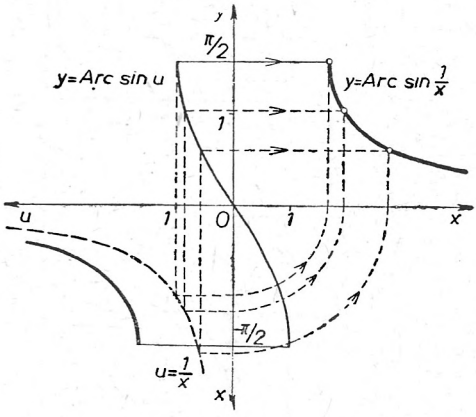
153. ábra

17. L. a 154. ábrát!



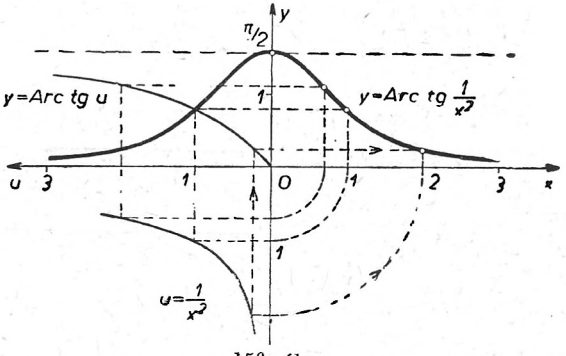
154. ábra

18. L. a 155. ábrát!



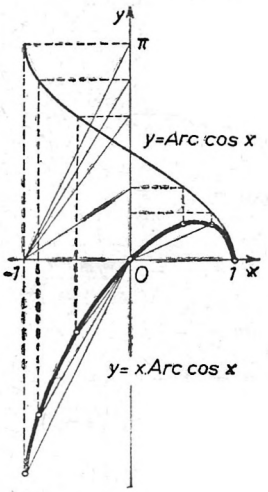
155. ábra

19. L. a 156. ábrát!



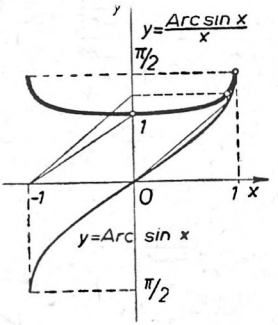
156. ábra

20. L. a 157. ábrát!



157. ábra

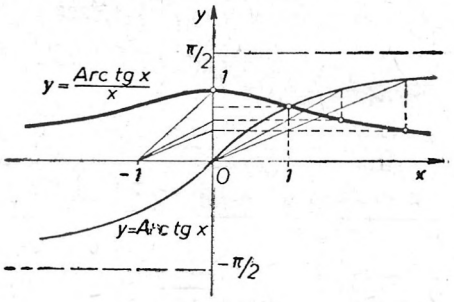
21. L. a 158. ábrát!



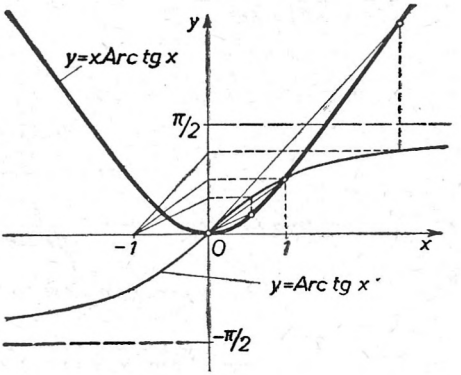
158. ábra

22. L. a 159. ábrát!

23. L. a 160. ábrát!



159. ábra



160. ábra

8. § b) γ)

A 10—19. feladatokban az egyenes iránytangensét m-mel, az egyenes és y tengely metszépsontjának ordinátáját pedig b-vel jelezzük:

10. $m = 0$; $b = 1$; Így: $y \equiv 1$

11. $m = 1$; $b = 0$; Így: $u = x$

12. $m = 0$; $b = 1$; Így: $v \equiv 1$

13. $m = 1$; $b = 0$; Így: $y = x$

14. $m = 0$; $b = 1$; Így: $y \equiv 1$

15. $m = 1$; $b = 0$; Így: $y = x$

16. $m = 0$; $b = 1$; Így: $w \equiv 1$

17. $m = 0$; $b = 1$; Így: $z \equiv 1$

18. $m = 0$; $b = 1$; Így: $u \equiv 1$

19. $m = 0$; $b = 1$; Így: $y \equiv 1$

20. $y = \dfrac{ax - \sqrt{1-x^2}}{a\sqrt{1-x^2} + x}$

21. $v = a\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-a^2}$

22. $w = \dfrac{a \cdot x}{\sqrt{1+a^2}} - \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-a^2}}$

24. $y = \dfrac{\pi}{2} - x$

25. $u = \dfrac{\pi}{2} - x$

26. $v = \dfrac{\pi}{2} - x$

27. $z = x$

28. $w = \dfrac{\pi}{2} - x$

30. $y = 1 - 2x^2$

31. $u = 2x^2 - 1$

32. $v = (4x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$

33. $w = (1 - 4x^2)\sqrt{1-x^2}$

34. $y = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

35. $z = \dfrac{2x}{1+x^2}$

36. $u = \dfrac{\sqrt{1-x^2} + 2x^2}{\sqrt{1+4x^2}}$

37. $y = \dfrac{x^3 - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-x^4}}{x^2\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^4}}$

38. $v = (8x - 64x^3)\sqrt{1-4x^2}$

39. $\sin(2 \operatorname{Arc}\sin 0{,}7) \cong \pm 1{,}0\ldots$

40. $\cos[2 \operatorname{Arc}\sin(-0{,}3)] = 0{,}82$

41. $\operatorname{tg}[2 \operatorname{Arc}\sin 0{,}34] = \pm 0{,}8328$

42. $y(0{,}17) \cong 0{,}8095$

43. $\operatorname{tg}(\arcsin 0{,}3 - \arccos 0{,}3) \cong \pm 1{,}432$

44. $\cos(\operatorname{arc\,tg}\alpha + \arccos\beta) = \beta \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \dfrac{\alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \dfrac{\beta - \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}$

45. $\sin(2 \arccos\alpha - \operatorname{arc\,tg}\beta) = \dfrac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + (1-2\alpha^2)\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}$

46. $\operatorname{ctg}(2 \arcsin\alpha - \operatorname{arc\,ctg}\beta) = \dfrac{(1-2\alpha^2)\beta + 2\alpha \cdot \sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha\beta\sqrt{1-\alpha^2} + (2\alpha^2 - 1)}$

47. $\operatorname{tg}[\arcsin(-\alpha) + \arccos(-\beta)] = \dfrac{\alpha\beta + \sqrt{1-\alpha^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{\beta\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha\sqrt{1-\beta^2}}$

50. $y \equiv \dfrac{\pi}{2}$; illetve: $y \equiv -\dfrac{\pi}{2}$

51. $y \equiv 1$

53. $|x| \leqq 1$ esetben

54. $|x| \leqq 1$ esetben

55. x bármely értékénél!

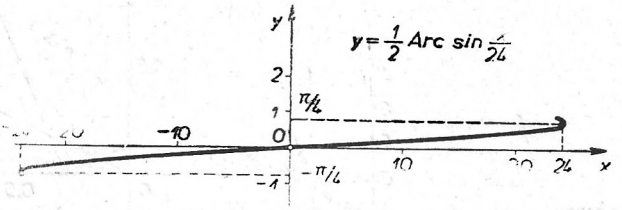
8. § *b) δ)*

1. $y = \operatorname{Arc}\sin\left(\dfrac{1}{8}\sin x\right)$

2. $y = \operatorname{Arc}\sin\dfrac{6x}{2800}$

3. $y = \sqrt{28{,}4288 + 23{,}4112 \cos x}$ (tonna); $z = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{4{,}72 \cdot \sin x}{4{,}72 \cos x + 2{,}48}$

4. $y = \dfrac{1}{v_r} \operatorname{Arc\,sin}\left(\dfrac{g}{v_r} x\right) \cong \dfrac{1}{2} \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{x}{24}$ (L. a 161. ábrát!



161. ábra

8. § c)

2. $x_1 \cong 0{,}4973$; $x_2 \cong -0{,}6155$

3. $x \cong 7{,}098$ 4. $x \cong 0{,}9925$

5. Az egyenletet úgy lehetne elvileg megoldani, hogy mindkét oldalnak vennők pl. a sinusát. Így algebrai egyenletet kapunk, amelyet x-re vagy közvetlenül, vagy pl. a lineáris interpolációnál tanult módszerrel megoldhatunk. Jelen példában s több ehhez hasonlóban is — megfelelő logarléccel, kis ügyességgel — igen jó közelítéssel megoldhatjuk a hasonló egyenleteket. Ebben a példában pl. egy kis ügyességgel meggyőződhetünk a logarlécen róla, hogy valós megoldása az egyenletnek nincs.

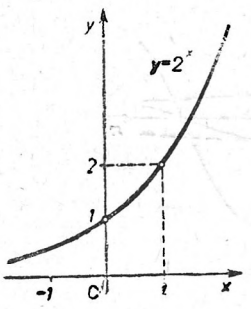
6. $x_k \cong -\operatorname{Arc\,sin} 0{,}61975 \cong \begin{cases} -38{,}24° + k \cdot 360° \\ 218{,}24° + k \cdot 360° \end{cases}$, azaz

$$\cong \begin{cases} -0{,}6673 \pm 2k\pi \\ 3{,}817 \pm 2k\pi \end{cases} \quad (k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots)$$

7. $x_l = l \cdot \pi$ $(l = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3; \ldots)$

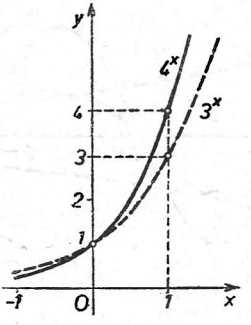
9. § a) α)

1. L. a 162. ábrát!



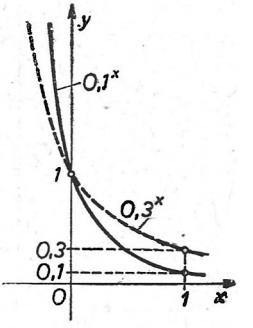
162. ábra

2. L. a 163. ábrát!



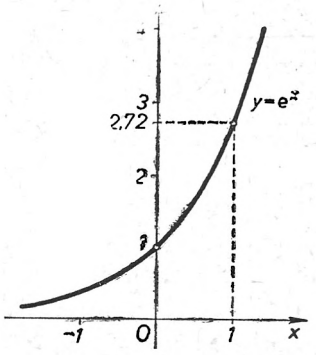
163. ábra

3. L. a 164. ábrát!

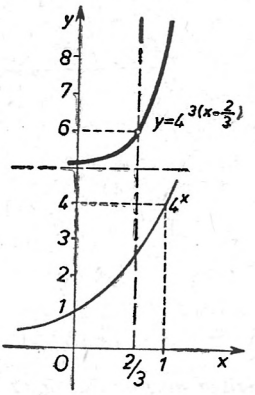


164. ábra

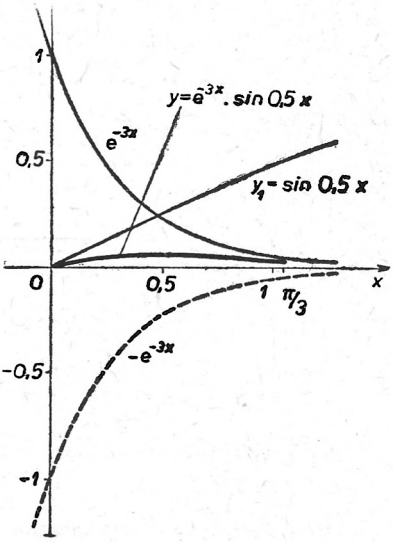
9. § *a) β)*



165. ábra



166. ábra



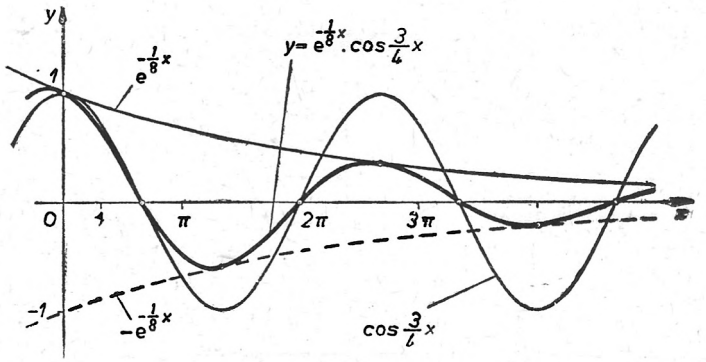
167. ábra

1. L. a 165. ábrát!

2. L. a 166. ábrát!

8. L. a 167. ábrát!

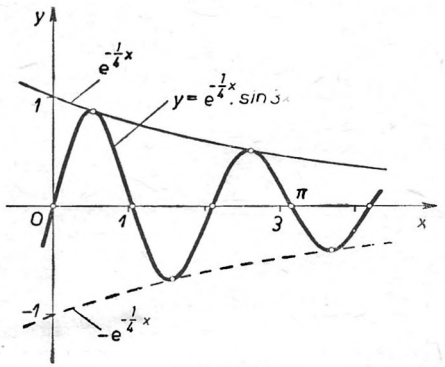
9. L. a 168. ábrát!



168. ábra

10. L. a 169. ábrát!

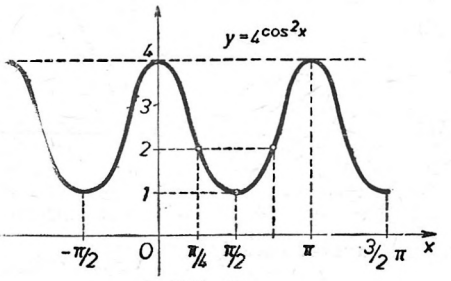
11. Érdemes felhasználni a $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ relációt! A függvény páros és periodikus! (L. a 170. ábrát!)



169. ábra

12. L. a 171. ábrát!

13. $y = (e^{-x})^x = e^{-x^2}$. A függvény $x < 0$ esetben monoton nő, páros voltából következően tehát $x > 0$ esetben monoton fogynia kell! (L. a 172. ábrát!)

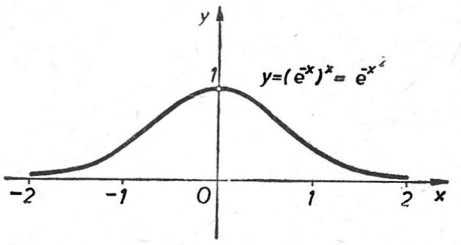


170. ábra

14. L. a 73. ábrát!

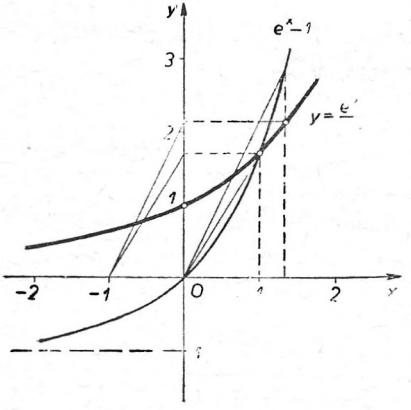
15. Figyeljük meg a 13. feladathoz közölt ábrát!

16. 0 hely az $x_0 = 0$; $y \to 0$, ha $x \to \infty$; $y \to -\infty$, ha $x \to -\infty$.

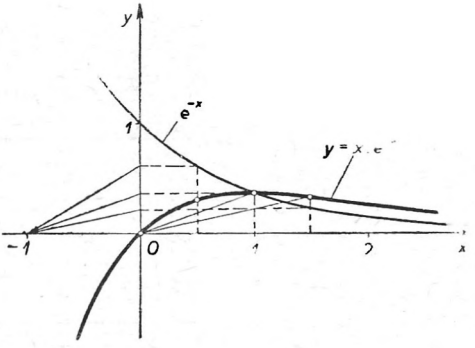


171. ábra

17. Az y értékek sorozatában bármely két egymást követő elem hányadosa ugyanaz az állandó, éspedig $\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{1}{\alpha^d} = \alpha^{-d}$. Így tehát egy α^d kvociensű (hányadosú) geometriai sorozatot képeznek az egymásra következő függvényértékek.



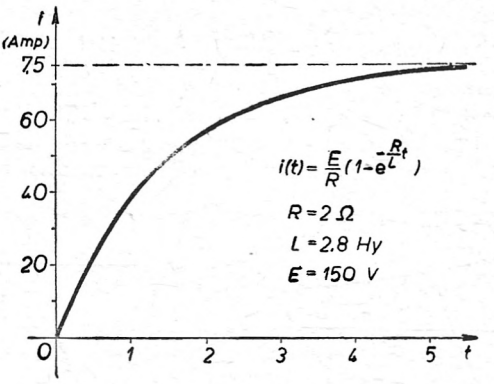
172. ábra



173. ábra

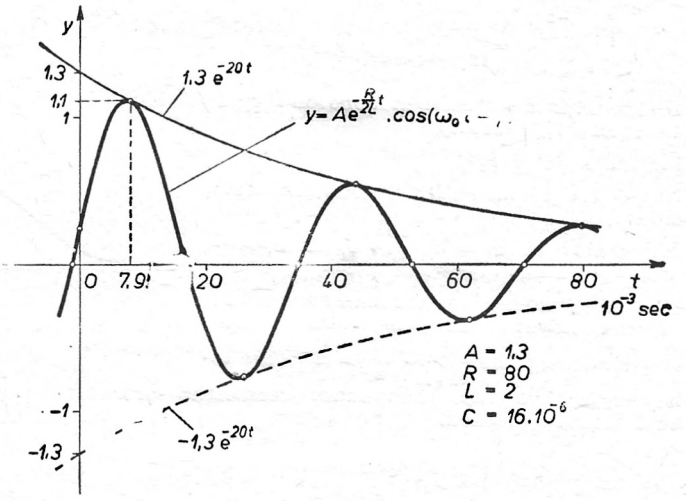
9. § *a) γ)*

1. L. a 174. ábrát!



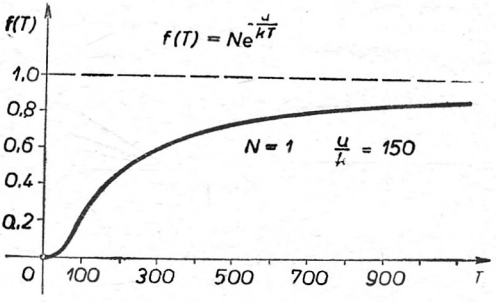
173. ábra

2. L. a 175. ábrát!



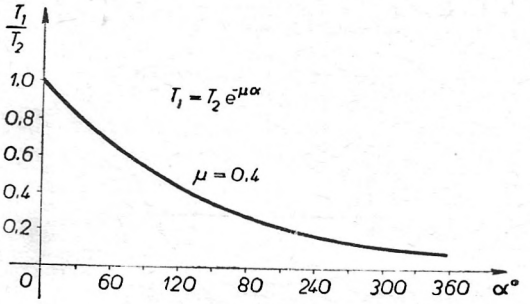
175. ábra

3. L. a 176 ábrát!



176. ábra

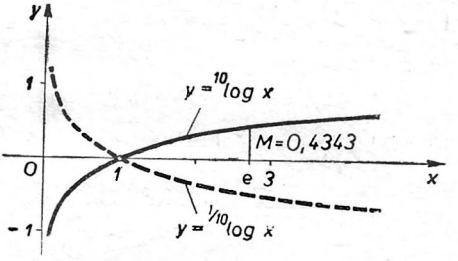
4. L. a 177. ábrát!



177. ábra

9. § b) α)

1. A függvény a monoton növekvő 10^x inverze, így maga is monoton növekvő! (L. a 178. ábrát!)

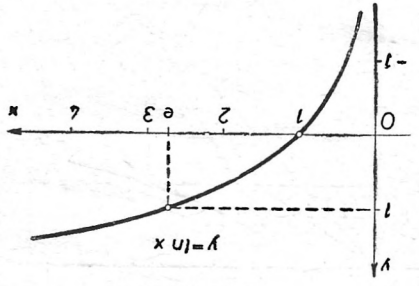


178. ábra

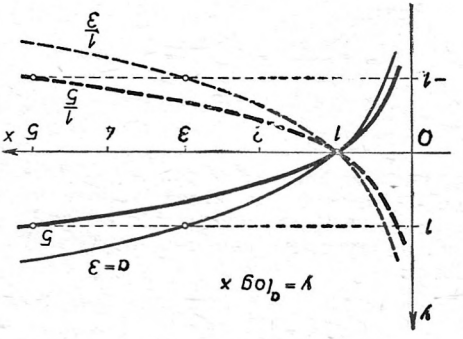
3. A 9 § b) α) 2. példa szerint igaz, éspedig az $^{\frac{1}{10}}\log x$ úgy származik a $^{10}\log x$-ből, hogy utóbbit az x tengelyen tükrözzük. (Lásd a 178. ábrát.)

4. L. a 179. ábrát!

5. L. a 180. ábrát!



179. ábra

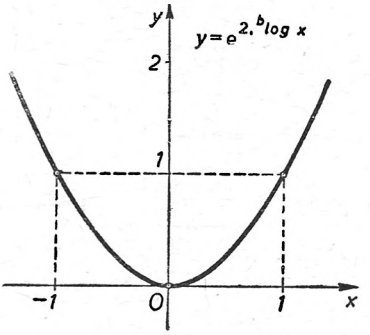


180. ábra

9. $y(x = 2) = 6$; $y(x = 5) = 10$; $y(x = a) = 2a$

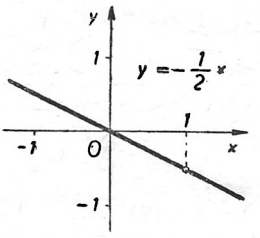
10. Az egyenes egyenlete: $y = 3x - 4$. Iránytangense: 3, az y tengelyt a $(0, -4)$ pontban döfi.

11. $y = \sqrt[\ln b]{x^2} = x^{\frac{2}{\ln b}} = x^{\frac{2}{\ln 3}} \cong x^{\frac{2}{1{,}1001}} \cong x^{1{,}816}$ (L. a 181. ábrát!)



181. ábra

12. $y = x^{\frac{1}{\ln 3}\log b} = -\frac{1}{2}x$ (L. a 182. ábrát!)



182. ábra

13. Át kell írnunk minden ilyen «furcsa» alapszámra vonatkozó logaritmust e alapra. Így:

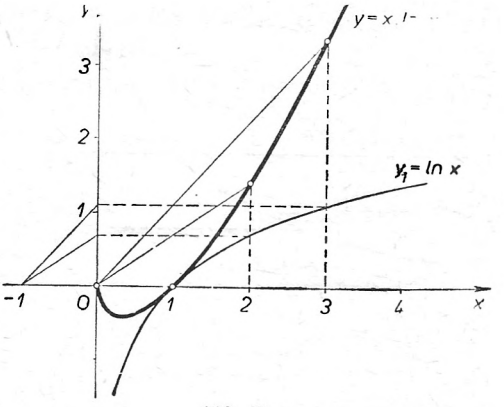
$$y = \frac{\ln x}{\ln e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = x \cdot \ln x$$

L. a 183. ábrát!)

14. Ahhoz, hogy az a ponton a grafikon átmenjen, a pont koordinátáinak ki kell elégíteniök az egyenletet: $\eta = {}^{\xi}\log \xi$. Ezt az egyenletet kell a-ra megoldani! Ebből:

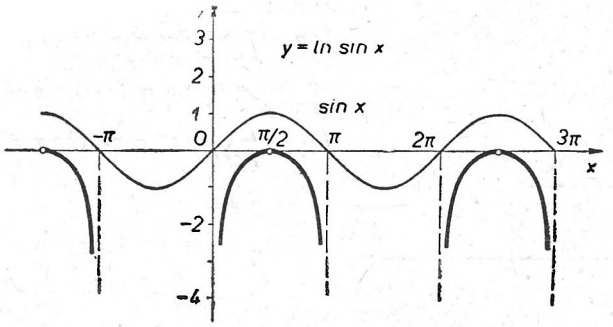
$$a = \sqrt[\eta]{\xi} = \xi^{\frac{1}{\eta}}$$

15. A függvény csak ott van értelmezve, ahol $\sin x > 0$; ahol $\sin x = 0$, ott egyik oldalról, amerről $\sin x > 0$ (tehát létezik görbe ág), függőleges aszimptotája van a görbének.



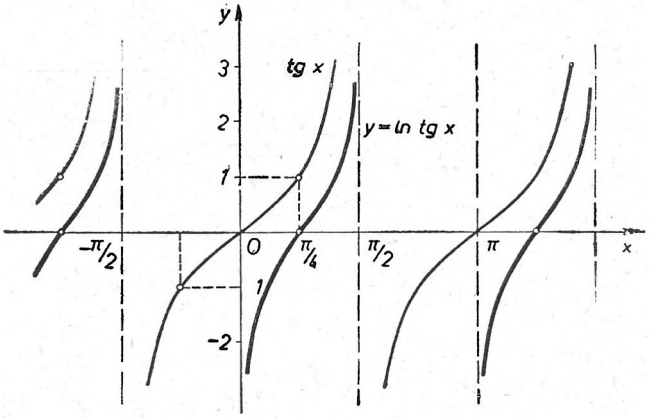
183. ábra

(L. a 184. ábrát!)



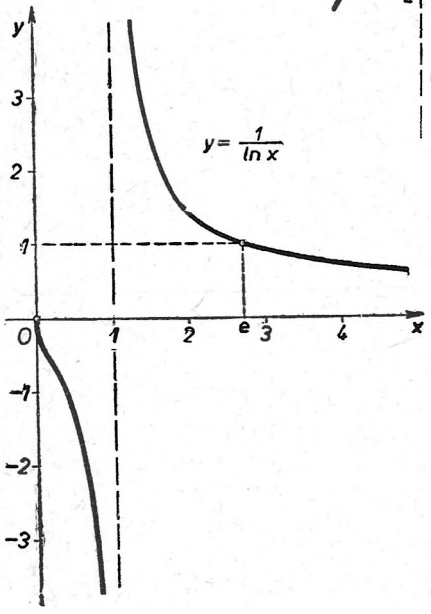
184. ábra

16. L. a 185. ábrát!

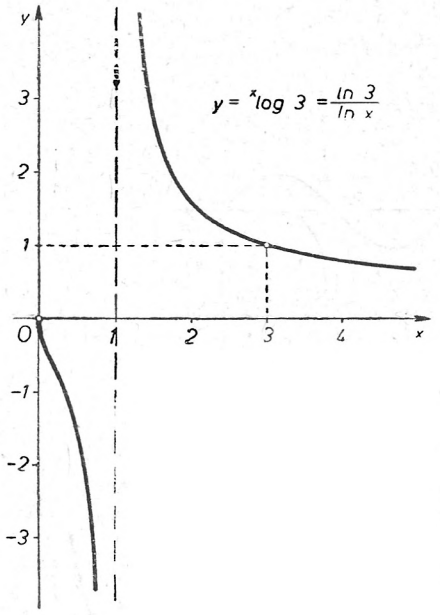


185. ábra

17. L. a 186. ábrát!



186. ábra



187. ábra

18. $y = {}^{x}\log 3 = \frac{\ln 3}{\ln x} \cong \frac{1{,}1001}{\ln x}$ (L. a 187. ábrát!)

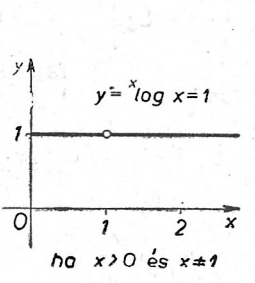
Így a 17. feladat ábráját az y tengely irányában egyszerűen nyújtani kell.

19. $y = {}^{x}\log x \equiv 1$; (ha $x > 0; x \neq 1$)! (L. a 188. ábrát!)

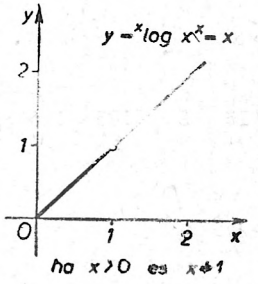
20. $y = {}^{x}\log x^{x} \equiv x$; (ha $x > 0; x \neq 1$) (L. a 189. ábrát!)

9. § b) β)

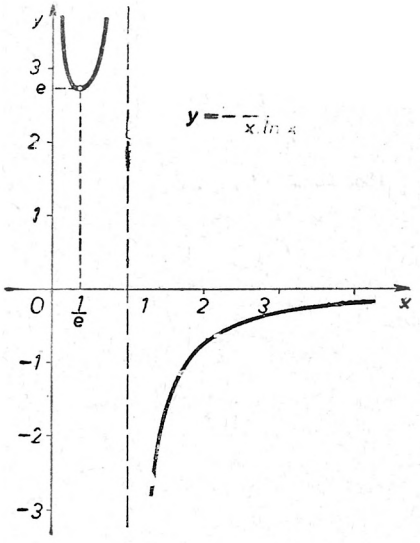
1. L. a 190. és a 191. ábrát!



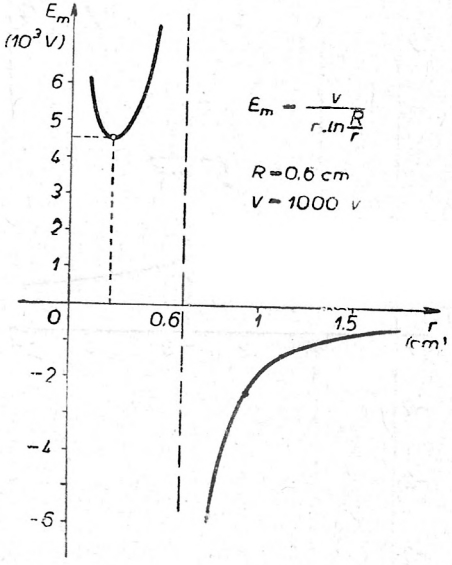
188. ábra



189. ábra



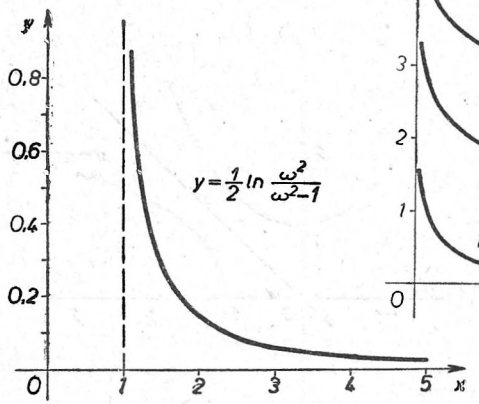
190. ábra



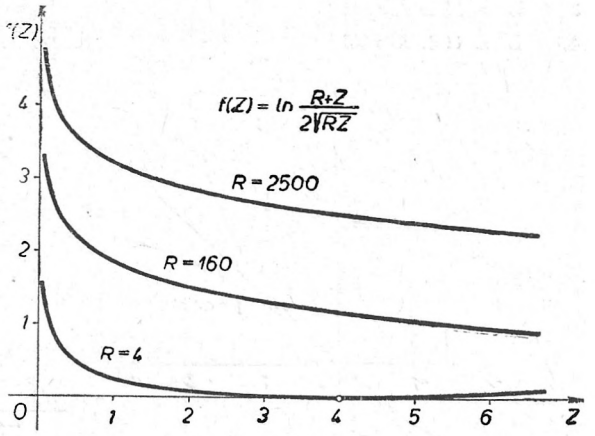
191. ábra

2. L. a 192. ábrát!

3. L a 193. ábrát!



192. ábra



193. ábra

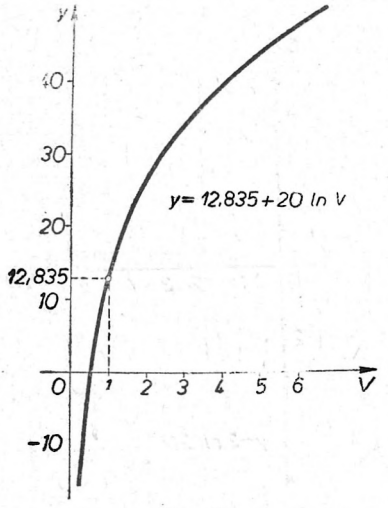
4. $y = c \cdot \ln x = c \cdot \ln d$. $U_2 = c \ln d + 2c \ln U \cong 12{,}835 + 20 \cdot \ln U$

6. $^z\log y = 2$; $y = f(x) = x^2$; $z = \varphi(x) = y - x = x^2 - x = x(x-1)$ (L. a 194. ábrát!)

7. *a)* A távvezetéken a bemenő feszültség bizonyosan nagyobb, mint a kimenő. A kettő viszonya így 1-nél nagyobb, amelynek pozitív a logaritmusa a használt alapoknál. Erősítőnél a viszony 1-nél kisebb.

b) Azt jelenti, hogy $\log \frac{U_b}{U_k} = -4\,N$; azaz: $\frac{U_b}{U_k} = e^{-4}$

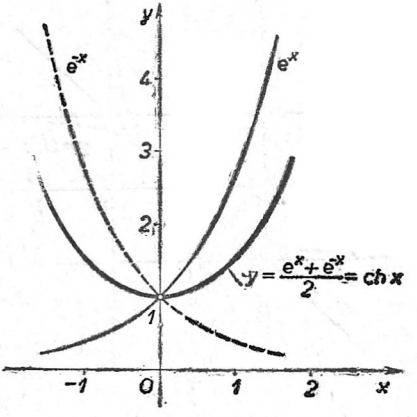
$$U_k = U_b\, e^4 \cong 54{,}3\, U_b$$



194. ábra

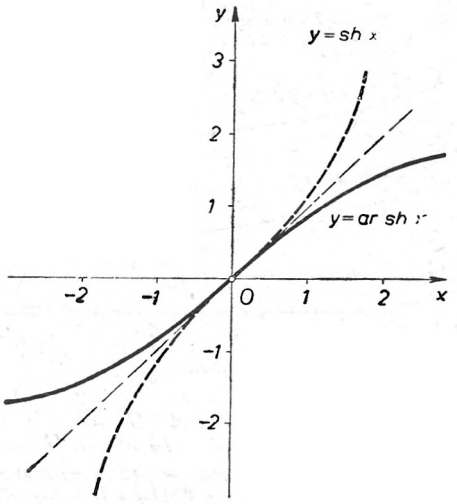
9. § c) β)

2. L. a 195. ábrát!

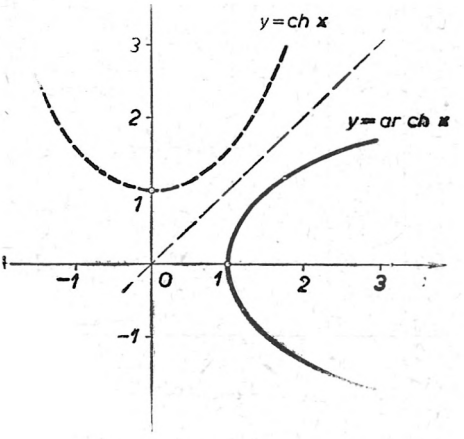


195. ábra

3. L. a 198. ábrát!
4. L. a 196. ábrát!

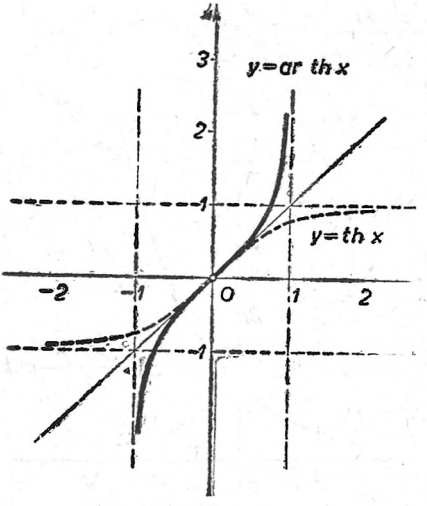


196. ábra

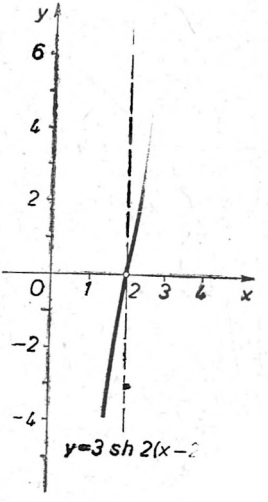


197. ábra

5. L. a 197. ábrát!
6. L. a 198. ábrát!
7. L. a 199. ábrát!

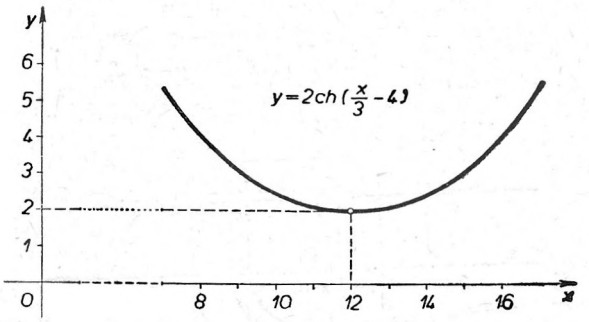


198. ábra



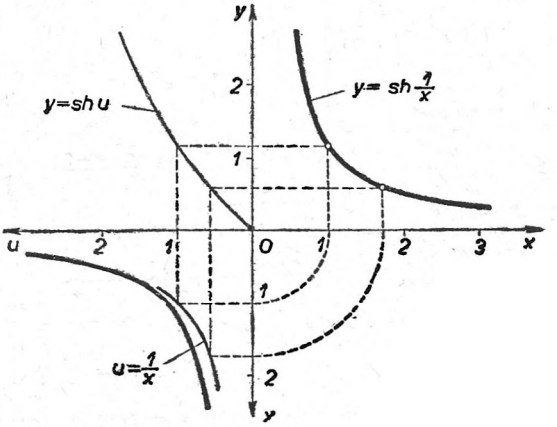
199. ábra

8. L. a 200. ábrát!



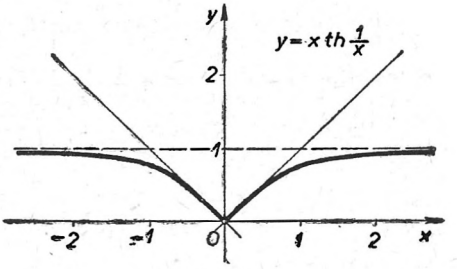
200. ábra

14. $\operatorname{sh} 0{,}75 - 3 \operatorname{ch} 0{,}72 + \operatorname{ar th} 0{,}24 \cong -2{,}7447$
15. $\operatorname{ar sh} 1{,}37 - 3 \operatorname{sh} 0{,}42 + 5 \operatorname{ar th} 0{,}5 \cong 2{,}5694$
16. $\operatorname{ch} 4{,}2 - 4 \operatorname{ar sh} 0{,}37 + \operatorname{th} 1{,}8 \cong 32{,}85$
17. $\operatorname{ar th} 0{,}42 + 3 \operatorname{ar sh} 1{,}8 - 3 \operatorname{ch} 2{,}2 \cong -9{,}2048$
18. L. a 201. ábrát!



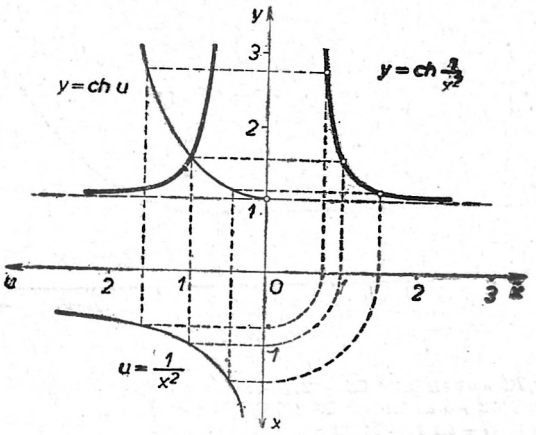
201. ábra

19. L. a 202. ábrát!



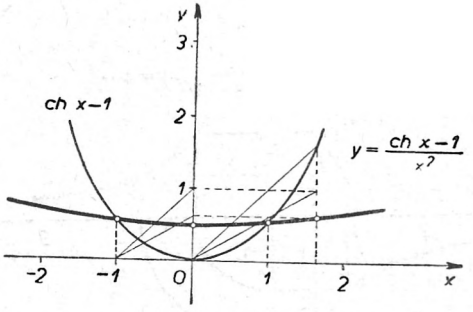
202. ábra

20. L. a 203. ábrát!



203. ábra

21. L. a 204. ábrát!



204. ábra

9. § c) γ)

1. Írjuk be a hiperbolikus függvények definícióit a relációba. Így azonnal kimutathatjuk ezt az alapvető összefüggést!

2. A 9. § *c) γ)* 1. feladatból osztással adódik.

3. A 9. § *c) γ)* 1. és 2. feladatból ch x is és th x is kifejezhető sh x — azaz y — segítségével!

$$z = (\operatorname{ch} x) = \sqrt{1+y^2}; \qquad w = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

4.
$$\operatorname{sh} u = \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}; \qquad \operatorname{th} u = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}}{\operatorname{ch} u} = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}}$$

5.
$$w = \frac{3y-5}{\sqrt{1-y^2}}$$

6. Először azt igazoljuk, hogy sh $(u+v)+$sh $(u-v) = 2$ sh u ch v, illetőleg, hogy sh$(u+v)-$sh $(u-v) = 2$ ch u sh v. Ezen két relációból összeadással, illetve kivonással az

igazolandó összefüggésre jutunk. Az itt javasolt két relációt pedig egyszerűen úgy igazolhatjuk, hogy a definíció alapján az exponenciális függvényre vonatkozó összefüggésre térünk át; az összegalakú kitevők helyett szorzatokra bontjuk a kérdéses tagokat; megfelelő kiemelések után épp a bizonyítandó összefüggés jobb oldalára jutunk (az exponenciális alakkal kifejezve)!

9. A 9. § *c) γ)* 7. feladatában u és v helyett x-et használva ($u = v = x$), majd a 9. § *c) γ)* 1. feladatban megismert relációt is figyelembe véve, a kívánt eredményt kapjuk.

11. Bármely argumentum cosinus-hiperbolikusát bármely másik hiperbolikus függvénynyel is ki tudjuk fejezni (lásd pl. 9. § *c) γ)* 3., 4., 5. feladatát), itt természetesen a sinus hiperbolikus függvény segítségével érdemes kifejezni y-t.

12. $$y = \sqrt{x^2+1}$$

13. $$z = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

14. Ugyanolyan módon kell átalakítanunk a kifejezést, ahogy azt a 9. § *c) γ)* 11., 12. illetve 13. feladatban tettük!

16. Használjuk fel a 9. § *c) γ)* eddigi feladatait a megfelelő átalakítások elvégzése céljából.

$$u = \operatorname{sh}(\operatorname{ar\,sh} x + \operatorname{ar\,ch} x) \equiv x^2 + \sqrt{1+x^2}\,\sqrt{x^2-1} = x^2 + \sqrt{x^4-1} \cdot (|x| \geq 1)$$

17. Formálisan ugyan hasonló eredményre juthatnánk, mint pl. a 16. feladatban, de a végeredménynek ugyanúgy semmi értelme sem lenne, mint a v függvénynek. $v = f(x)$ ugyanis egyetlen x értékre sincs definiálva.

18. $$y = \operatorname{ch}(\operatorname{ar\,sh} x - \operatorname{ar\,th} 3{,}5x) \equiv \frac{\sqrt{1+x^2} - 3{,}5x^2}{\sqrt{1-12{,}25x^2}} \cdot \left(3{,}5 \cdot |x| < 1;\ |x| < \frac{1}{3{,}5}\right)$$

19. $y = \operatorname{sh} 2 \operatorname{ar\,sh} x \equiv 2x\sqrt{1+x^2}$ **20.** $w = \operatorname{ch} 2 \operatorname{ar\,ch} x = 2x^2 - 1$

21. $$z = \operatorname{ch} 2 \operatorname{ar\,sh} x \equiv 1 + 2x^2$$

22. $$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{sh}^2 x - 1 = 34{,}28$$

$$\operatorname{th} x = \frac{4{,}2}{\sqrt{4{,}2^2+1}}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \cdot 4{,}2 \cdot \sqrt{1+4{,}2^2} \cong 36{,}3662$$

$$\operatorname{sh} 3x = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 2x + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} 2x = 4\operatorname{sh}^3 x + 3\operatorname{sh} x \cong 308{,}2$$

23. Ugyanúgy kell eljárnunk, mint ahogy a trigonometrikus függvények hasonló jellegű feladatainál. (Pl. 8. § *b) γ)* 48. feladat.)

$$y = \operatorname{ar\,ch}\left(ax + \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{a^2x^2-1}\right); \text{ vagy}$$

$$y = \operatorname{ar\,sh}\left(\sqrt{x^2-1} \cdot ax + x\sqrt{a^2x^2-1}\right); \text{ stb.}$$

24. Pl. $$y = \operatorname{ar\,sh}\left(bx^2 - \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{b^2x^2-1}\right)$$

25. Pl. $$y = \operatorname{ar\,sh}\left(x\sqrt{1+c^2x^2} + cx\sqrt{1+x^2}\right)$$

26. Pl. $$y = \operatorname{ar\,ch}\left(ax \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x\sqrt{a^2x^2-1}}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$$

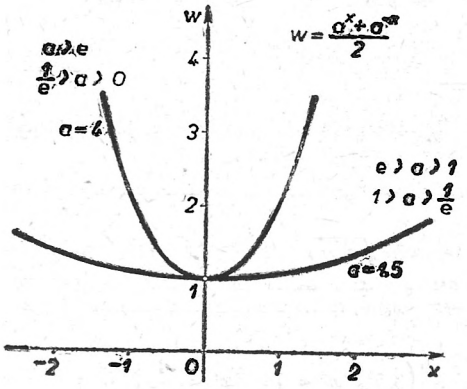
$$= \operatorname{ar\,ch}\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\left(a + \sqrt{a^2x^2-1}\right)\right] \cdot (|x| < 1)$$

27. Pl. $$y = \operatorname{ar\,th}\frac{5x}{1+6x^2} \cdot \qquad \left(|x| < \frac{1}{3}\right)$$

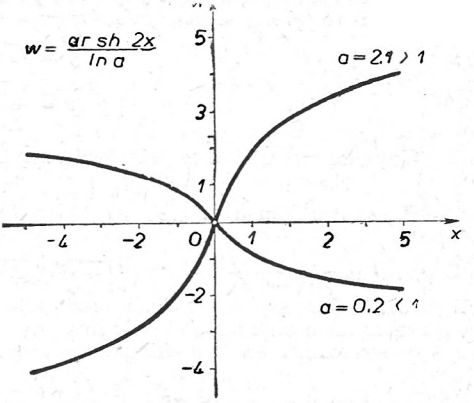
28. Pl. $y = \operatorname{ar\,sh}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x\sqrt{1+9x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. $(|x| < 1)$

29. Át kell térnünk – ismert módon – e alapú hatványmennyiségekre. $w = \operatorname{ch}(x \cdot \ln a)$ azaz $w(x) = y(x \cdot \ln \gamma)$. (L. a 205. ábrát!)

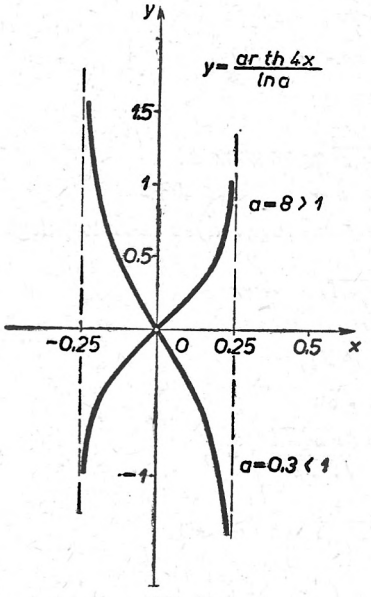
31. $w = \frac{\operatorname{ar\,sh} 2x}{\ln a}$; azaz $w(x) = \frac{y(2x)}{\ln a}$ L. a 206. ábrát!



205. ábra



206. ábra



207. ábra

32. $z = \frac{\operatorname{ar\,th} 4x}{\ln a}$: azaz:

$z(x) = \frac{y(4x)}{\ln a}$ (207. ábra).

33. $w = {}^a\log 4 + \frac{\operatorname{ar\,ch} 3x}{\ln a}$; így

$w(x) = \frac{y(3x)}{\ln a} + \log 4$

34. L. a 208. ábrát!

9. § c) δ)

1. L. a 209. ábrát!

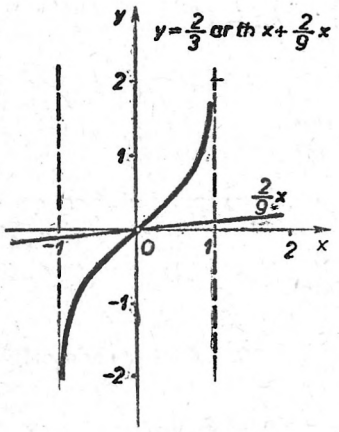
2. $y(0) = 450$; $y(12) \cong 450{,}675$; $y(65) \cong 454{,}59$. (L. a 210. ábrát!)

3. L. a 211. ábrát!

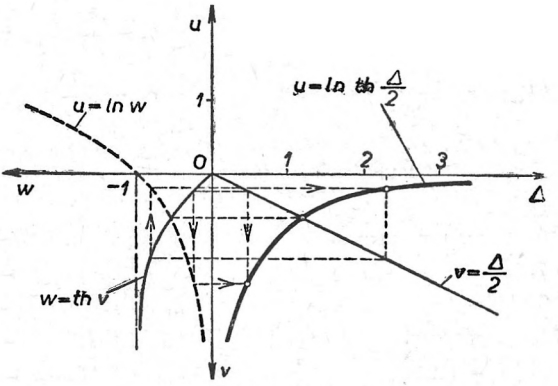
4. L. a 212. ábrát!

10. § a)

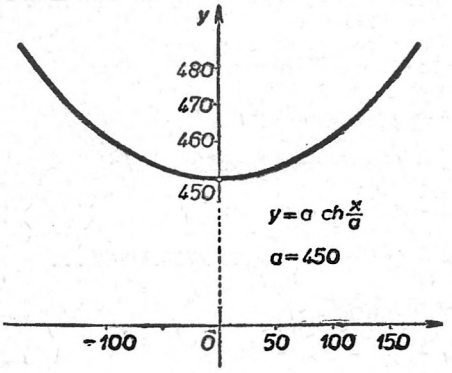
1. $u_1 = 2$; $u_2 = 2^2 = 4$; $u_4 = 2^4 = 16$, $u_{10} = 2^{10} = 1024$



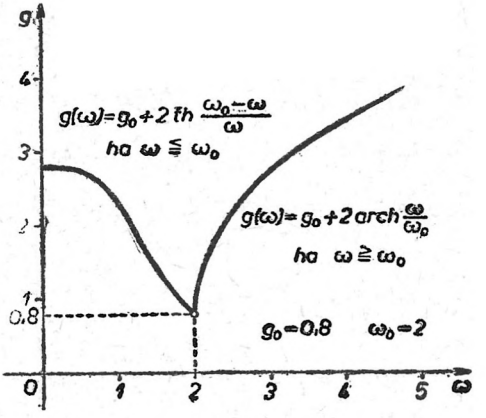
208. ábra



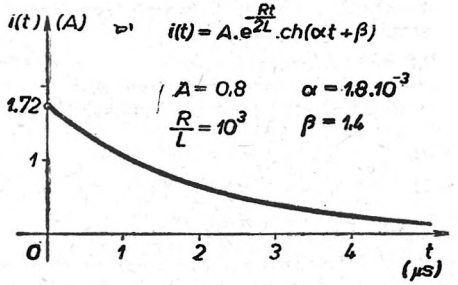
209. ábra



210. ábra



211. ábra



212. ábra

2. $a_3 = (-1)^3 \cdot \cos\frac{3\pi}{2} = (-1)(-1) = 1$; $a_7 = 1$; $a_{12} = 1$

3. $b_3 = \frac{1-\cos 3\pi}{3^2} = \frac{2}{9}$; $b_7 = \frac{1}{37}$; $b_{12} = 0$

4. $c_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{27}{6} = 4{,}5$; $c_7 = \frac{7^7}{7!}$; $c_{12} = \frac{12^{12}}{12!}$

Az 5 – 16. feladatok megoldásában a tetszés szerinti korlátot nem adjuk meg, csak a k-val jelölt legkisebb korlátot. Egy ennél nagyobb szám ugyanis (bármilyen is egyébként) nyilván ilyen (tetszés szerinti) korlát.

5. Nem korlátos.
6. Nem korlátos.
7. $k = 1$
8. $k = 1$
9. $k = 1$
10. $k = 2$ (lásd a 10. § *b)* 1. feladatot!)
11. Nem korlátos.
12. $k = 2$
13. $k = 1{,}25$
15. $k = \sin\frac{1}{2} = \sin 0{,}5 \cong 0{,}48$
16. $k = \frac{6^6}{6!} = \frac{6^5}{5!} = \frac{6^4}{4 \cdot 5} = \frac{3^2 \cdot 6^2}{5} = \frac{324}{5} = 64{,}8$

Az 5—16. feladatok legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátját adjuk csak meg az eredménytárban. Előbbit k_a-val, utóbbit K_f-fel jelöljük:

5. k_a nem létezik; $K_f = -1$
6. sem k_a, sem K_f nem létezik
7. $k_a = 0$; $K_f = 1$
8. $k_a = -\frac{1}{2}$; $K_f = 1$
9. $k_a = -\frac{1}{2}$; $K_f = 1$
10. $k_a = 1$; K_f nem létezik
11. $k_a = 1$; K_f nem létezik
12. $k_a = 1$; $K_f = 2$
13. $k_a = -1$; $K_f = 1{,}25$
14. $k_a = 0$; $K_f = \frac{10^{10}}{10!} \cong 2755{,}73192\ldots$
15. $k_a = 0$; $K_f = \sin 0{,}5 \cong 48$
16. $k_a = -\frac{6^6}{5!} = -64{,}8$; $K_f = \frac{6^6}{6!} = |k_a| = 64{,}8$

18. Monoton az 1., a 3., a 4., az 5., a 7., a 10., a 12., a 15. feladatban szereplő sorozat.

19. Végül is monoton (természetesen) a 18. feladatban felsorolt valamennyi sorozat (még hozzá $k = 0$-tól, azaz egyetlen elemet sem kell figyelmen kívül hagynunk). Ezenkívül a 14. feladatban szereplő sorozat ($k = 9$).

21. *a)* Jelöljük az $\varepsilon = 0{,}2$ értékű számot ε_1-gyel; ε_2-vel a 10^{-4} és ε_3-mal a 10^{-8}-nal egyenlő ε-t; illetve n_1; n_2; n_3-mal az ezeknek megfelelő n_0-t. Csak azokat a feladatszámokat írjuk itt le, amelyek valóban 0 sorozatokkal kapcsolatosak.

7. $n_1 \cong 5$; $n_2 \cong 10^4$; $n_3 \cong 10^8$
8. $n_1 \cong 5$; $n_2 \cong 10^4$; $n_3 \cong 10^8$
9. $n_1 \cong 4$; $n_2 \cong 14$; $n_3 \cong 27$

14. $n_1 \geqq 27$; $n_2 \geqq 34$; $n_3 \geqq 40$. (Logarléccel igen gyorsan és egyszerűen nyomon tudjuk követni a sorozat elemeinek *nagyságrendi* alakulását. Ezen feladatnál pedig csak arra van szükségünk!)

15. $n_1 \geqq 3$; $n_2 \geqq 13$; $n_3 \geqq 26$. (Kis szögek sinusai igen jó közelítéssel egyeznek a radiánokban mért szögmértékszámmal!)

16. $n_1 \geqq 16$; $n_2 \geqq 23$; $n_3 \geqq 33$

b)

7. $n_0 = 10^3$ **8.** $n_0 = 10^3$ **9.** $n_0 = 10$

14. $n_0 = 32$ **15.** $n_0 = 21$

24. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik tehát egy s és egy $s' \neq s$ szám úgy, hogy mindkettő benne van valamennyi skatulyában. Így a differenciasorozat vizsgálatánál ellentmondásra jutunk – a feltevés tehát lehetetlen! (Ún. indirekt bizonyítás!)

25. Azt kell kimutatnunk, hogy minden olyan sorozat, amelyre az eredeti konvergenciakritérium (definíció) érvényes, a Cauchy-kritériumot is kielégíti és viszont – ha a «Cauchy-t» kielégíti, az eredeti definíció is érvényes rá. (Utóbbi a nehezebb. Pl. intervallumskatulyázással megy!)

28. Ismét az indirekt bizonyítás egyszerű (l. pl. a 24. feladatot az eredménytárban).

31. A 30. feladat eredményeit célszerű felhasználni. A határérték épp a felső (monoton növekvő), illetve az alsó határ (monoton csökkenő sorozatnál!)

34. Alakítsuk így át a bizonyítandó relációt (hogy ti. $|x_n| = \left|\sqrt[n]{a_n} - 1\right| < \varepsilon$):

$$1 + x_n = \sqrt[n]{a}; \qquad (1 + x_n)^n = a$$

Ezután a Bernoulli-egyenlőtlenség (10. § *a)* 20. feladat) felhasználásával könnyen igazolhatjuk, hogy

$$|x_n| < \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n};$$

ebből már minden kiolvasható.

35. A 35. feladatban szereplő minden elemet határoljunk be a 34. sorozat egy-egy elemével felülről és alulról. Ebből következik már az állítás – kis átgondolásával a viszonyoknak, n növekedését figyelembe véve.

36. Nézzük át közben a 35. feladatot. A *d)* pont igazolásához csak azt kell meggondolni, hogy minden racionális szám olyan racionális számokból álló sorozattal is «megközelíthető», amely kizárólag az illető számból áll!

37. $10^{\sqrt{2}} \cong 13{,}82$ **38.** $3^{\sqrt{3}} \cong 6{,}69$

39. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \cong 1{,}631$ **40.** $\sqrt[3]{3}^{\sqrt{3}} \cong 1{,}695$

46. A 45. f. alapján – hatványozással – igazolhatjuk a tétel helyességét.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3^5 - 1^5}{1} = 242$ **48.** $u_n \to \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 6} = \dfrac{5}{3} = 1{,}66$

49. $x_n \to \sqrt{1} = 1$

50. Jelöljük $n_{0,1}$-gyel az $\varepsilon = 10^{-1}$-nek; $n_{0,2}$-vel az $\varepsilon = 10^{-5}$-nek megfelelő n értéket. (Bernoulli-egyenlőtlenségét célszerű felhasználni!) Ekkor

$$n_{0,1} \geqq 15; \qquad n_{0,2} \geqq 1{,}5 \cdot 10^5$$

53. Pl. a következő sorozat ilyen:

$$x_n = [1 - (-1)^n] \cdot n$$

Ennek a 0 érték sűrűsödés helye (minden második elem 0) és mégis divergens.

54. Pl. a következő sorozat ilyen:

$$y_n = \left[1-(-1)^n\right] \cdot \left(s+\frac{1}{2^n}\right) + \left[1-(-1)^{n+1}\right] \left(s'-\frac{1}{2^n}\right)$$

10. § *b)*

3. Igen. Könnyen ki lehet mutatni, hogy egyrészről a páros indexű szeletek sorozata, másrészről a páratlan indexű szeletek sorozata – intervallumskatulyázást alkot. Márpedig akkor mindkettőnek – s így a részletösszegek szorzatának is – közös a határértéke.

4. Konvergens. Ti. monoton és korlátos. Utóbbit a 10. § *b)* 2. feladatában megismert «összevonásos módszer» segítségével igazolhatjuk.

5. Konvergens.

10. § *c)*

1. A Cauchy-féle kritérium azonnal használható.

2. Hogy pl. az $[f(x_n)]$ és az $[f(y_n)]$ sorozatnak ugyanaz kell, hogy legyen a határértéke, ha valamennyi függvényértéksorozat konvergens, igen egyszerűen igazolható. Képezzük ui. a következő sorozatot:

$$u_1 = x_1; \quad u_2 = y_2; \quad u_3 = x_3; \ldots; \quad u_{2n} = y_{2n} \quad u_{2n+1} = x_{2n+1}; \ldots$$

Ennek a sorozatnak is a a határértéke (ezt kell egyrészről igazolnunk); másrészt az $[f(u_n)]$ sorozat csak akkor lehet konvergens, ha az $[f(x_n)]$ és $[f(y_n)]$ sorozatok közös határértékkel bírnak. (Ezt kell másodsorban igazolnunk.) Ebből a többi már egyszerűen következik.

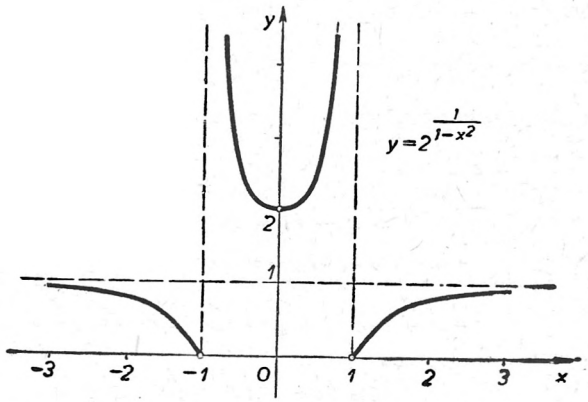
7. Az $x = 5$ helyen szakadás van – éspedig elsőfajú!

8. Az $x = 1$ és $x = 4$ helyen szakadás van – mindkettő elsőfajú! Az $x = 0$ helyen megszüntethető a szakadás!

9. Az $x = 0$ helyen megszüntethető a szakadás. Az $x = 1$ és $x = -1$ helyen elsőfajú szakadás van.

13. Az $x = 0$ helyen elsőfajú szakadása van a függvénynek. (A jobb oldali határérték: $+\infty$; a bal oldali határérték: 0.)

14. Az $x_1 = 1$ és az $x_2 = -1$ helyen elsőfajú a szakadás (213. ábra).



213. ábra

15. Az $x = 0$ helyen másodfajú szakadás van (ti. bal oldali határérték nincs, mert a függvény csak pozitív x-ekre van definiálva).

16. Elsőfajú szakadás van az $x = 0$ helyen.

18. $\frac{\sin x}{x} \to 1$; ha $x \to 0$. **19.** $x \cdot \sin \frac{1}{x} \to 0$; ha $x \to 0$

20. A $z = \cos \frac{1}{x}$ függvénynek az $x = 0$ helyen másodfajú szakadása van. Sem a jobb sem a bal oldali határérték nem létezik. (Igazoljuk ezt a 10. § *c)* 2. feladat alapján két különböző sorozat segítségével!)

21. $v \to e$, ha $x \to 0$. Ennek igazolása előtt nézzük át a 10. § *a)* 51. feladatot.

23. Intervallumskatulyázással egyszerűen igazolhatjuk.

26. Gondoljuk meg, hogy az $\frac{1}{f(x)}$ függvény mindenütt folytonos, ahol $f(x)$ folytonos és 0-tól különböző. Az adott feltételek mellett tehát $\frac{1}{f(x)}$ az $a \leqq x \leqq b$ zárt intervallumban mindenütt folytonos. Ha azonban $f(x)$ a 0 értéket tetszés szerinti módon megközelíti, akkor itt ellentmondást mutathatunk ki! (Használjuk fel a 10. § *c)* 2. feladatot és ügyes sorozatokat, valamint a Cauchy-féle konvergenciakritériumot!)

27. A tétel természetesnek tűnik; ha azonban meggondoljuk, hogy végtelen sok szám között nincs szükségszerűen sem legnagyobb, sem legkisebb szám (pl. az

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}; \qquad x_2 = -1 + \frac{1}{3}; \qquad x_3 = 1 - \frac{1}{4}; \ldots$$

$$\ldots x_n = (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{1}{n}; \ldots$$

sorozatban sincs sem legkisebb, sem legnagyobb elem, bár van a sorozatnak alsó határa is: $k_a = -1$, és felső határa is: $K_f = 1$, rögtön megértjük, hogy valóban igazolásra szorul az a tény, hogy az M és m értéket nemcsak tetszés szerint megközelíti, hanem fel is veszi a függvény! A 10. § *c)* 26. feladat felhasználásával az igazolás nagyon egyszerű!

A kiadásért felelős a Tankönyvkiadó Vállalat igazgatója. Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc. Műszaki vezető: Lojd Lajos. Grafikai szerkesztő: Boromisza Zsolt. Műszaki szerkesztő: Drexler Alajos. A kézirat nyomdába érkezett: 1977. április. Megjelent: 1977. október. Példányszám: 1000. Terjedelem: 20 (A/5) ív, 213 ábra. Készült az 1966. évi harmadik kiadás alapján, matricáról íves magasnyomással, a Szegedi Nyomdában, az MSZ 5601—59 és az MSZ 5602—55 szabvány szerint. Raktári szám: 44 131/II. 77-1827 — Szegedi Nyomda — Felelős vezető: Dobó József igazgató

Ára: 21,— Ft